

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс



Ричард Фейнман
НОБЕЛЕВСКИЙ
ЛАУРЕАТ

ЗАДАЧИ *и* УПРАЖНЕНИЯ
с ответами и решениями

— 1.4 —

- 1 • Современная наука о природе. Законы механики
- 2 • Пространство. Время. Движение
- 3 • Излучение. Волны. Кванты
- 4 • Кинетика. Теплота. Звук



YRSC

Richard P. Feynman
Robert B. Leighton
Matthew Sands

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS
Exercises

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

1.4 Задачи и упражнения с ответами и решениями

Перевод с английского,
составление ответов и решений
*Ю. В. Конобеева, Г. Я. Коренмана,
В. И. Куштана, Н. С. Работнова*

Под редакцией
А. П. Леванюка

Издание четвертое



УРСС

Фейнман Ричард Ф., Лейтон Роберт Б., Сэндс Мэтью

Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями к вып. 1–4: Пер. с англ. / Под ред. А. П. Леванюка. Изд. 4-е.

М.: Едиториал УРСС, 2004. — 280 с.

ISBN 5–354–00697–X

Этот задачник можно рассматривать как дополнительный выпуск «Фейнмановских лекций по физике». В нем содержатся задачи с ответами и решениями по всем разделам общей физики. Идеи большинства задач были предложены основным автором лекций — лауреатом Нобелевской премии Р. Фейнманом. Задачи с решениями являются естественным дополнением к курсу лекций, но их можно использовать и независимо от него.

Книга рассчитана на преподавателей вузов, техникумов и средних школ, студентов и аспирантов, на руководителей школьных физических кружков. Часть материала можно использовать для подготовки к экзаменам при поступлении в физико-технические вузы.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 25.02.2004 г.

Формат 60×90/16. Тираж 2000 экз. Печ. л. 17,5. Зак. № 3-1278/468.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5–354–00698–8 (Полное произведение)

**ISBN 5–354–00697–X (Задачи и упражнения
с ответами и решениями к вып. 1–4)**

© Предисловие:

А. П. Леванюк, 1978, 2004

© Едиториал УРСС, 2004

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: <http://URSS.ru>
Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев.

Предисловие к четвертому изданию

Особенностью курса Фейнмановских лекций на русском языке является дополнение сборника задач и упражнений подробными решениями, выполненными при подготовке русского издания. Похоже, что эти решения помогли многим в освоении курса и в использовании его для преподавания физики. Можно надеяться, что они будут играть эту роль и в дальнейшем.

В предисловии к курсу лекций напоминает, что цель своих лекций Фейнман видел в том, чтобы помочь читателю получить «физическое представление о мире, которое... составляет сейчас главную часть истинной культуры нашей эпохи». Хотелось бы только добавить, что физическое представление о мире включает в себя не только (и не столько) знакомство с основными законами и понятиями, но и (главным образом) «физическое мышление». Выработать его или хотя бы понять, в чем оно состоит, невозможно просто следя за чужой мыслью. Необходимо самому искать ответы на вопросы. Перед физиком такие вопросы возникают сами собой в процессе исследовательской работы, и ответы на них в книгах и журналах обычно не найдешь. Решение задач, обдумывание различных способов их решения — первый этап на том пути, которым физик идет всю свою жизнь. Отвечать на вопросы, поставленные Фейнманом — непревзойденным и оригинальнейшим мастером физического мышления, — большое удовольствие, не говоря уже о пользе.

А. Леванюк
апрель 2004

Предисловие

В этой книге собраны задачи к «Фейнмановским лекциям по физике». Они предлагались студентам Калифорнийского технологического института (США), слушавшим лекции Р. Фейнмана. В оригинальном издании (содержащем только условия) составители задач к первому тому не указаны, но сообщается, что половина задач ко второму тому предложена Р. Фейнманом, а половина — преподавателями, проводившими семинарские занятия, большинство задач к третьему тому составлены М. Сэндсом, Р. Фейнманом, Дж. Пайком и Дж. Нойгенбауэром. В настоящем, как и в предыдущем русском издании, кроме условий задач даны также и их подробные решения.

Польза от любого задачника, в котором кроме условий есть и их решения, далеко не бесспорна. То же может быть сказано и о данной книге. Чтобы научиться физике, безусловно необходимо (хотя и недостаточно) решать задачи. Но их нужно именно решать, а не смотреть в решения. Эта книга едва ли поможет тем, кто не имеет времени (или не очень любит) подумать. Если студент или самостоятельно изучающий предмет не обладает ко всему прочему достаточной волей и самолюбием, он почти наверняка не устоит перед искушением посмотреть в решение, не попыгавшись решить задачу сам. А жаль! Чтобы научиться думать так, как думают физики, нельзя обойтись без того, чтобы не «поломать голову». Как это ни удивительно, довольно многие не понимают, что цель обучения — не в том, чтобы узнать некий набор фактов и положений, а в том, чтобы научиться самостоятельно находить подход к решению физических проблем. В свете сказанного идеальным представляется случай, когда читатель смотрит в решение, приведенное в книге только после того, как получит свое собственное. Мы надеемся, что сравнение его решения с приведенным в книге будет полезным. Прежде всего для него — он может обнаружить, что понимает некоторые вопросы не так глубоко, как ему казалось, и, несомненно, захочет восполнить этот пробел. Кроме того, может оказаться, что его решение более удачно, чем приведенное в книге, — в этом случае он поможет улучшить ее следующее издание, если, конечно, напишет письмо в редакцию. Правда, задач слишком

много, чтобы решать их с начала и до конца. Поэтому иногда имеет смысл заглянуть в решение, не решая задачу полностью, лишь прикинув в уме, как ее можно решить.

Составители и редактор хотели бы выразить большую благодарность лицам, приславшим свои замечания по решениям и указания на ошибки, которых в предыдущем издании оказалось, увы, довольно много. Большое число замечаний и предложений прислал нам читатель из Ленинграда С. М. Заславский, некоторые из его решений использованы в настоящем издании. Весьма полезными оказались также замечания И. П. Базарова, Т. С. Величкиной, И. А. Яковлева, Ю. А. Янайта и многих других, перечислить которых не представляется возможным. Мы надеемся продолжить работу по улучшению решений и рассчитываем на дальнейшую помощь читателей.

Составление решений, а также их переработка при подготовке третьего издания задачника были проведены группой преподавателей Московского инженерно-физического института. Решения задач к первому тому лекций составлены В. И. Куштаном (гл. 1—21), Н. С. Работновым (гл. 26—30 и 32—38) и Ю. В. Конобеевым (гл. 22—25, 31, 39—50); решения ко второму и третьему томам — соответственно Ю. В. Конобеевым и Г. Я. Коренманом.

А. Леванюк

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Вып. 1

СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ ● ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

К главе 1. Атомы в движении

При решении приведенных ниже задач используйте идеи и методы, изложенные в первой главе «Лекций», а также ваш собственный опыт и воображение. О получении точных численных результатов особенно не заботьтесь.

1. 1. При обычных условиях воздух имеет плотность около $0,001 \text{ г/см}^3$, тогда как плотность жидкого воздуха примерно 1 г/см^3 .
 - а) Оцените число молекул в 1 см^3 газообразного и жидкого воздуха.
 - б) Оцените массу «молекулы воздуха».
 - в) Рассчитайте среднее расстояние, которое молекула воздуха проходит между двумя последовательными соударениями с другими молекулами при нормальном давлении и температуре. Это расстояние называется *средней длиной свободного пробега*.
 - г) Оцените давление, до которого необходимо откачать вакуумную систему, чтобы средняя длина свободного пробега в ней равнялась 1 м .
1. 2. В один из давних дней палеозойской эры капля слепящего ливня упала на мягкую ровную землю и оставила на ней отпечаток. Шло время, на этот отпечаток при раскопках наткнулся страдающий от жары и жажды студент-геолог. Осушая свою фляжку, он от нечего делать прикидывает, сколько молекул из той древней капли было в воде, которую он только что выпил. Оцените и вы число этих молекул, используя только те данные, которые вам уже известны. О деталях, не приведенных в условии задачи, сделайте сами разумные предположения.

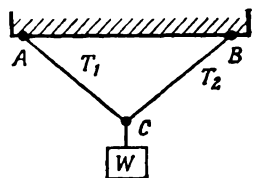
1. 3. Действие происходит где-то в Калифорнии. На подоконнике возле раскрытого окна оставили стакан с водой.
 - а) Как вы думаете, сколько времени он так простоит, пока вода из него не испарится полностью?
 - б) Сколько молекул при этом будет испаряться с каждого квадратного сантиметра водной поверхности в секунду?
 - в) Существует ли связь, и если да, то какая, между ответом на вопрос (а) и среднегодовым количеством осадков?
1. 4. Если атомы, из которых состоят все тела, находятся в непрерывном движении, то за счет чего предметы сохраняют постоянную форму, иногда не меняясь очень подолгу (например, окаменелости)?
1. 5. Можете ли вы объяснить, почему не существует кристаллов с гранями в форме правильного пятиугольника? (Треугольники, квадраты и шестиугольники в кристаллических формах встречаются постоянно.)
1. 6. Как зависит давление газа P от числа атомов в единице объема n и $\langle v \rangle$ — средней скорости атомов? Будет ли P прямо пропорционально n и $\langle v \rangle$ или зависимость отличается от линейной?
1. 7. Если теплота есть не что иное, как движение молекул, то чем отличается горячий покоящийся бейсбольный мячик от холодного, но быстро движущегося?
1. 8. Объясните, почему и как трение между движущимися частями машины приводит к выделению тепла.
1. 9. Химики обнаружили, что молекулы резины состоят из длинных перекрещивающихся цепочек атомов. Объясните, почему кусок резины нагревается, если его растянуть.
- 1.10. Что случится с куском резины, на котором подвешен груз, если резину нагреть? (Прodelайте сами такой опыт.)
- 1.11. Вам дано большое число стальных шариков равного диаметра d и сосуд известного объема V . Все габариты сосуда много больше диаметра шариков. Какое максимальное число шариков может поместиться в сосуде?

К главе 4.

Решите следующие задачи, используя закон сохранения энергии и принцип виртуальной работы.

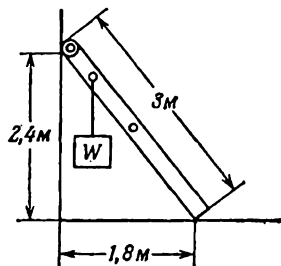
4. 1. Груз весом $W = 50 \text{ кГ}$ подвешен в средней точке проволоки ACB , как показано на рисунке; $AC = CB = 5 \text{ м}$; $AB = 5\sqrt{2} \text{ м}$.

Найдите натяжения T_1 и T_2 проволоки.

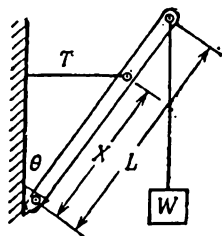


4. 2. Лестница длиной 3 м приставлена под углом к гладкой вертикальной стене. В верхнем ее конце имеются ролики (см. рисунок). Лестница весит 12 кГ . На расстоянии $0,75 \text{ м}$ от ее верхнего конца подвешен груз 24 кГ . Найдите:

- силу, с которой ролики давят на стену;
- горизонтальную и вертикальную составляющие силы, с которой лестница давит на землю.

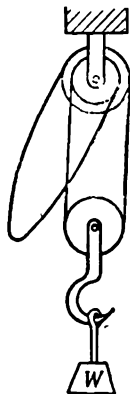


4. 3. Подъемное устройство состоит из однородного стержня длиной L и весом W ; устройство своим нижним концом шарнирно соединено со стенкой. С вертикалью стержень образует постоянный угол θ благодаря горизонтально натянутой проволоке, которая соединена со стержнем на расстоянии X от шарнира. Груз W подвешен к верхней точке стержня. Найдите натяжение T горизонтальной проволоки.



4. 4. Ферма состоит из легких алюминиевых стержней, концы которых шарнирно соединены друг с другом. В точке C ферма опирается на ролик, который может двигаться по гладкой плоскости. При сварке стержень AB нагревается,

4. 7. В дифференциальном ворота, который схематически изображен на рисунке, используется цепь, каждый метр которой содержит N звеньев. Шкивы верхнего блока снабжены зубцами, которые продеваются в звенья цепи, причем шкив большего диаметра имеет n зубцов, а шкив меньшего диаметра $n-1$. Трение в системе таково, что силы, необходимые для подъема или опускания груза W , отличаются в R раз. Предполагая, что трение от направления движения не зависит, найдите эти силы.

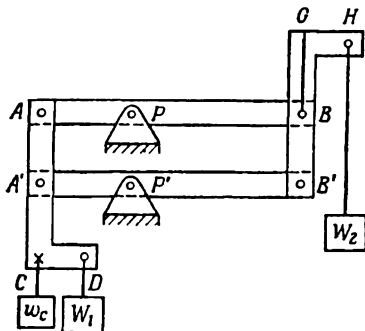


4. 8. Петля, сделанная из гибкой тяжелой цепи весом W , надета на гладкий прямой круговой конус, высота которого h , а радиус основания r . Цепь покоится в горизонтальной плоскости (ось конуса направлена вертикально). Найдите натяжение цепи.
4. 9. Подвижная рама $AA'B'B'$ укреплена в вертикальной плоскости на шарнирах P и P' (см. рисунок). Трение во всех подвижных соединениях пренебрежимо мало. Все размеры жестких уголков $AA'CD$ и $BB'GH$ одинаковы; кроме того,

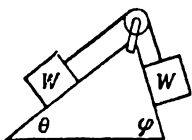
$$AP = A'P' = \frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} P'B',$$

$$CD = GH = \frac{1}{2} AP.$$

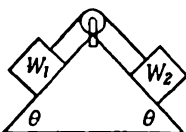
Благодаря противовесу w_c рама в отсутствие грузов W_1 и W_2 находится в равновесии. Если в точке D подвесить груз W_1 весом $0,5$ кг, то какой следует подвесить груз W_2 в точке H , чтобы сохранить равновесие?



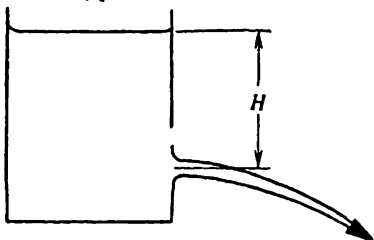
- 4.10. Через блок перекинuty одинаковые грузы, которые опираются на абсолютно гладкие наклонные плоскости (см. рисунок). Если позволить грузам двигаться, какую скорость они приобретут, пройдя расстояние D ?



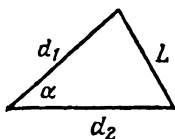
- 4.11. Два груза W_1 и W_2 разного веса ($W_1 > W_2$) удерживаются в состоянии покоя на гладких наклонных плоскостях. Если позволить им двигаться, то какова будет их скорость после прохождения расстояния D ?



- 4.12. В бак с площадью поперечного сечения A налита жидкость плотности ρ . Жидкость свободно вытекает из небольшого отверстия, расположенного на расстоянии H ниже уровня жидкости. Площадь отверстия равна a . Если внутреннее трение (вязкость) в жидкости отсутствует, с какой скоростью она вытекает из отверстия?



- 4.13. Из решения приведенных выше задач должно быть ясно, что рассмотрение статического равновесия в отсутствие трения можно свести, используя принцип виртуальных перемещений, к проблеме чисто геометрического характера: куда сместится одна точка, если малое смещение другой задано? Во многих случаях на этот вопрос легко ответить, используя следующие свойства треугольников:



- I. Если при постоянной длине сторон d_1 и d_2 угол меняется на малую величину $\Delta\alpha$, то длина противолежащей стороны L меняется на

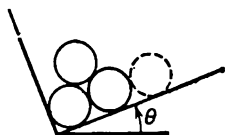
$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin \alpha \Delta \alpha.$$

- II. Если длины сторон прямоугольного треугольника a , b и c изменяются соответственно на Δa , Δb и Δc , то эти изменения связаны между собой соотношением

$$a \Delta a + b \Delta b = c \Delta c$$

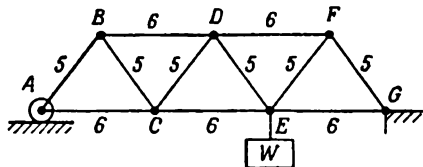
(c — гипотенуза). Можете ли вы доказать эти формулы?

- 4.14. Грузовик загружен одинаковыми гладкими бревнами. Он заехал в кювет и стоит, накренившись на один борт, причем дно кузова образует с горизонталью угол θ (крена в продольном направлении нет — грузовик стоит «на ровном киле»). Заканчивается разгрузка кузова. Если удалить бревно, показанное на рисунке штрихами, то последние три бревна при малейшем уменьшении угла θ раскатятся. Найдите угол θ .

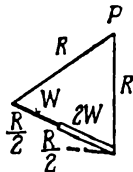


- 4.15. Длины наклонных и горизонтальных стержней фермы, показанной на рисунке, относятся как 5 : 6. Все соединения шарнирные, свободные, и вес самой фермы пренебрежимо мал.

- а) Какие стержни при данном положении груза W можно заменить гибкими связями?
б) Найдите усилие в стержне BD .

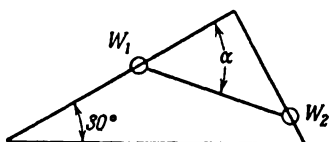


- 4.16. Стержень длиной R составлен из двух однородных кусков одинаковой длины, один из которых весит вдвое больше другого. Стержень подвешен за концы на двух нитях длиной R , прикрепленных к гвоздю в точке P . Какой угол с горизонталью образует стержень в положении равновесия?



- 4.17. Из прочной проволоки изготовлена рамка в форме прямоугольного треугольника и помещена в вертикальной пло-

скости, как показано на рисунке. По проволоке без трения скользят связанные нитью два грузика весом $W_1 = 100 \text{ Г}$ и $W_2 = 300 \text{ Г}$. Чему равны натяжение нити и угол α в положении равновесия?



К главе 6. Вероятность

6. 1. «Молекула воздуха» при температуре 25°С и давлении 760 мм рт. ст. , двигаясь со средней скоростью 450 м/сек , успевает между двумя последовательными столкновениями пролететь около $7 \cdot 10^{-6} \text{ см}$. Если в воздухе отсутствует *струйное*, макроскопическое движение, то сколько примерно времени понадобится молекуле, чтобы удалиться на 1 см от точки, в которой она находится в данный момент времени?
6. 2. В сумке у мальчика три красных, два зеленых и один белый шарик. Он вынимает, не глядя, три первых попавшихся под руку шарика. Какова вероятность того, что
 - а) все три шарика разного цвета?
 - б) все три шарика одного цвета?
6. 3. Неподвижная сфера радиусом b «обстреливается» потоком маленьких шариков радиусом a . Будем предполагать, что рассеяние абсолютно упругое и что угол падения равен углу отражения (они отсчитываются от линии, соединяющей центры сферы и шарика в момент соприкосновения). Получите выражение для относительной доли шариков, рассеиваемых на разные углы. Результат представьте в виде формулы для сечения рассеяния. Убедитесь, что результат для полного сечения рассеяния сводится к очевидному выражению $\pi(a + b)^2$.

К главе 7. Теория тяготения

Приведем некоторые свойства эллипса. Его размеры и форма полностью определяются заданием любых двух следующих величин:

- a — большая полуось;
- b — малая полуось;
- c — расстояние от центра до одного из фокусов;
- e — эксцентриситет;
- r_p — кратчайшее расстояние от фокуса до линии эллипса;
- r_a — наибольшее расстояние от фокуса до линии эллипса.

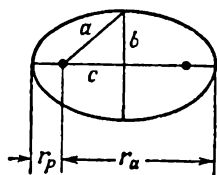
Соотношения между этими величинами имеют вид

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

$$r_p = a - c = a(1 - e),$$

$$e = \frac{c}{a} \text{ (по определению),}$$

$$r_a = a + c = a(1 + e).$$



• • •

7. 1. Расстояние от Луны до центра Земли изменяется от 363 300 км в перигее до 405 500 км в апогее, а период обращения Луны вокруг Земли составляет 27,322 дня. Искусственный спутник Земли движется по орбите так, что расстояние от земной поверхности в перигее равно 225 км, а в апогее 710 км. Средний диаметр Земли равен 12 756 км. Определите период обращения спутника.
7. 2. Спутник движется по круговой орбите радиусом R вокруг большого небесного тела массы M . Масса спутника m .
 - а) Используя соотношение $s = at^2/2$ и рассуждения, изложенные в гл. 7 «Лекций», получите выражение для центростремительного ускорения, которое испытывает спутник, движущийся по круговой орбите. Выразите это ускорение через орбитальную скорость и радиус орбиты.
 - б) Полагая $ma = GMm/R^2$, получите третий закон Кеплера.
7. 3. а) Сравнивая параметры орбитальных движений Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, определите отношение массы Солнца к массе Земли. (Можете при этом использовать соотношения, полученные в предыдущей задаче.)
 - б) Ио, спутник Юпитера, совершает оборот по орбите радиусом 421 800 км за 1,769 дня. Определите отношение массы Юпитера к массе Земли.
7. 4. Используя представление о том, что два взаимно притягивающихся тела непрерывно «падают» друг на друга и в результате обращаются вокруг одной общей неподвижной точки (центра масс системы), покажите, что период обращения при фиксированном расстоянии R между телами зависит только от суммы их масс, но не от отношения масс. Это утверждение справедливо и для эллиптических орбит. Попытайтесь его доказать.

7. 5. Две звезды a и b движутся одна вокруг другой под действием взаимного гравитационного притяжения. Большая полуось орбиты этого относительного движения, измеренная в астрономических единицах (А. Е.), равна R , а период обращения составляет T лет. Получите выражение для отношения суммы масс звезд $m_a + m_b$ к массе Солнца.
7. 6. Тригонометрический параллакс Сириуса (т. е. угол, под которым с Сириуса виден радиус земной орбиты) равен $0,378$ угл. сек. Используя это значение и численные данные, приведенные на фиг. 7.7 в «Лекциях» (вып. 1, стр. 132), определите возможно точнее суммарную массу системы Сириуса по отношению к массе Солнца:
- а) считая, что плоскость орбиты относительного движения Сириуса A и Сириуса B перпендикулярна направлению на Землю;
 - б) учитывая, что реальный угол между плоскостью орбиты и направлением на Землю отличается от прямого, является ли значение массы, полученное вами, предельным? Если да, то верхний это предел или нижний?
7. 7. Эксцентриситет земной орбиты равен $0,0167$. Найдите отношение максимального значения орбитальной скорости Земли к минимальному значению.
7. 8. В 1986 г. ожидается появление кометы Галлея. Это будет ее седьмое возвращение из путешествия вокруг Солнца, если начинать счет с тех дней 1456 г., когда перепуганные люди возносили в церквях молитвы, прося защитить их от «дьявола, турка и кометы». Во время ее последнего прохождения через перигелий 19 апреля 1910 г. было измерено расстояние между нею и Солнцем, оказавшееся равным $0,60$ А. Е.
- а) На какое расстояние уходит комета от Солнца в самой дальней точке своей траектории?
 - б) Чему равно отношение максимального значения ее орбитальной скорости к минимальному?
7. 9. Как можно определить массу Луны?
- 7.10. Радиусы Земли и Луны равны 6378 и 1738 км соответственно, а их массы находятся в отношении $81,3:1$. Рассчитайте ускорение свободного падения на Луне, если на Земле оно равно $9,8$ м/сек².

- 7.11. Какова должна быть точность экспериментального определения g , чтобы стал заметен «суточный ход» этой величины из-за наличия лунного притяжения? Для простоты будем предполагать, что лаборатория, в которой производятся измерения, имеет такое географическое расположение, что Луна проходит над ней в зените, а «под ней» — в надире. Пренебрегайте влиянием приливов.

К главе 8. Движение

8. 1. Тело движется по прямой линии с постоянным ускорением a . При $t = 0$ оно находится в точке $x = x_0$ и имеет скорость $v_x = v_{x0}$. Покажите, что в момент времени t положение и скорость тела определяются соотношениями

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}at^2,$$

$$v_x(t) = v_{x0} + at.$$

8. 2. Исключите время из формул, приведенных в предыдущей задаче, и покажите, что в любой момент времени выполняется равенство

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a(x - x_0).$$

8. 3. Обобщите результаты двух последних задач на случай трехмерного движения с постоянным ускорением, проекции которого на координатные оси равны a_x , a_y и a_z .
8. 4. Снаряд выпущен из орудия, установленного на поверхности Земли, с начальной скоростью v под углом θ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислите расстояние, которое он пролетит, и максимальную высоту, которой он достигнет в полете.
8. 5. Под каким углом к горизонту следует установить ствол орудия, чтобы снаряд (см. предыдущую задачу) пролетел максимальное возможное расстояние?
8. 6. Новичок-автолюбитель, незнакомый с обычаями регулировщиков движения на пригородных дорогах, был наказан штрафом за превышение скорости. Поэтому, увидев на ровном участке дороги плакат «Проверьте спидометр», он решает последовать этому совету. Пройдя линию «0» размеченного участка шоссе, он нажимает на акселератор и в течение всего времени проверки заставляет свою машину двигаться с постоянным ускорением. Он замечает, что мимо столбика с отметкой «0,1 мили» его машина

проходит через 16 сек после начала испытания, а еще через 8 сек он проезжает мимо отметки «0,2 мили».

а) Каково будет в этот момент времени показание его спидометра?

б) С каким ускорением двигалась машина?

7. Ракета, запущенная в вертикальном направлении, движется с ускорением $2g$ в течение всех 50 сек работы двигателя. Пренебрегая сопротивлением воздуха и изменением величины g с высотой:

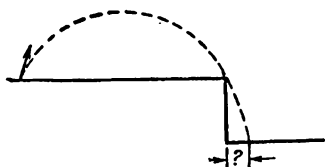
а) начертите диаграмму $v-t$ (зависимость скорости от времени) для всего времени полета;

б) определите максимальную высоту, которой достигла ракета;

в) рассчитайте полное время полета от момента запуска до возвращения на Землю.

8. На длинном горизонтальном участке полигона испытываются ракетные и авиационные реактивные двигатели. Тележка с ракетным двигателем, стартуя с места, начала двигаться с постоянным ускорением, пока не выгорело все горючее, а потом она продолжала двигаться с постоянной скоростью. Горючее, как оказалось, кончилось ровно посередине отмеренного расстояния. Затем из той же начальной точки начала разгоняться тележка с авиационным реактивным двигателем, которая прошла с постоянным ускорением все расстояние. Оказалось, что обе тележки прошли известное расстояние за одинаковое время. Чему равно отношение ускорений, развиваемых ракетным и авиационным двигателями?

9. Миномет установлен на расстоянии 8100 м от вертикального обрыва высотой 105 м (см. схему). Необходимо минометным огнем поразить цели, скрытые за обрывом. Как близко к основанию обрыва могут «подобраться» мины, если их начальная скорость составляет 300 м/сек?



10. Угол можно измерять длиной дуги окружности, которую отсекает угол, если его вершина находится в центре окружности. Если S — длина дуги, а R — радиус окружности, то угол в радианах равен

$$\theta = \frac{S}{R}.$$

- а) Покажите, что если $\theta \ll 1 \text{ рад}$, то $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$.
 б) Используя полученный результат и формулы для косинуса и синуса суммы двух углов, найдите производные от $\sin x$ и $\cos x$, применяя основную формулу

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

- 8.11. Тело движется по кругу радиусом R против часовой стрелки с постоянной скоростью v . Центр окружности помещается в начале прямоугольной системы координат (x, y) , и в момент $t = 0$ тело находится в точке с координатами $(R, 0)$.

- а) Найдите x , y , v_x , v_y , a_x , a_y как функции времени.
 б) Покажите, что

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

и

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

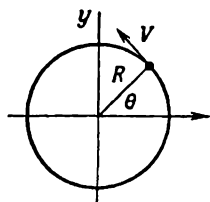
где

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

а точка над буквой означает производную по времени, так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$



- 8.12. Небольшой камешек застрял в узоре протектора автомобильной шины радиусом R . Шина катится по горизонтальной дороге без проскальзывания с постоянной скоростью v . Найдите выражения для координат камешка x и y как функций времени (в момент времени $t = 0$ камешек касается дороги). Найдите также в прямоугольной системе координат зависимость от времени компонент скорости и ускорения камешка.

К главе 9. Динамические законы Ньютона

9. 1. Частица массой m движется в области пространства, где на нее действует сила, пропорциональная скорости частицы и перпендикулярная одновременно вектору скорости и оси z . В начальный момент скорость частицы равна v_0

и лежит в плоскости $x-y$. Покажите, что частица движется по круговой орбите и найдите радиус этой орбиты. Пусть коэффициент пропорциональности в выражении для силы через скорость равен β , т. е. $F = \beta v$.

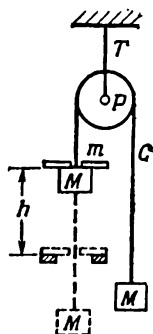
9. 2. Найдите радиусы кривизны орбиты, изображенной на фиг. 9.6 в «Лекциях» (вып. 1, стр. 173) в моменты времени $t = 0$, $t = 0,82$ и $t = 2,086$ сек.
9. 3. Мальчик бросает мяч вверх под углом 70° к горизонту и попадает прямо в открытое окно, которое расположено на 9,6 м выше его плеча. Мяч влетает в окно горизонтально.
 - а) С какой скоростью вылетел мяч из руки?
 - б) Чему равен радиус кривизны траектории мяча, когда он перелетает через подоконник?
 Можете ли вы определить радиус кривизны траектории в любой момент времени?
9. 4. Джим и Джо, два специалиста по космической физике, выросшие на разных планетах, встречаются на межпланетном симпозиуме Палаты мер и весов, посвященном утверждению универсальной системы физических единиц. Джим с гордостью описывает заслуги системы MKSA, которой пользуются все цивилизованные люди на Земле. Джо с меньшей гордостью превозносит прелести системы $M'K'S'A'$, которой пользуются цивилизованные люди во всей Солнечной системе, кроме Земли. Если постоянные множители, которые связывают единицы массы, длины и времени в этих двух системах, равны μ , λ и τ , так что

$$m' = \mu m, \quad l' = \lambda l \text{ и } t' = \tau t,$$

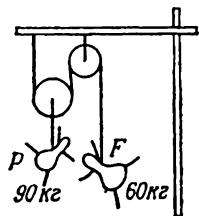
то какие множители потребуются для перевода единиц измерения скорости, ускорения, силы и энергии из одной системы в другую?

9. 5. Как будут связаны между собой численные значения гравитационной постоянной, измеренные в двух системах единиц, описанных в предыдущей задаче?
9. 6. Чему будет равно численное значение величины $GM_\odot$, если расстояние измерять в астрономических единицах, а время в годах?

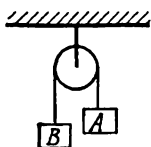
9. 7. Если изготовить модель Солнечной системы в одну k -ю натуральной величины из материалов той же самой средней плотности, которая известна для настоящих планет и Солнца, то как будут зависеть от «масштабного фактора» k периоды обращения «планет» модели по своим орбитам?
9. 8. На схеме изображена машина Атвуда — один из первых приборов для измерения ускорения свободного падения. Массы блока P и нитей пренебрежимо малы, трение отсутствует. С обеих сторон блока подвешены грузы одинаковой массы M , и система находится в равновесии. Затем на один из грузов кладется маленький грузик m , и этот груз начинает опускаться. После того как он пройдет расстояние h , грузик подхватывается специальным упором и грузы продолжают движение с постоянной скоростью v . Найдите ускорение свободного падения g , если величины m , M , h и v известны.



9. 9. Двое молодых марсиан, Паоло и Франческа, хотят переправиться через марсианский канал Римини, но ни одна гондола не берет их обоих сразу, а переправляться в разных лодках они отказались. Находчивый гондольер Джузеппе умудряется все-таки заработать на их переезде. Он подвешивает эту парочку на мачте (см. рисунок) с помощью невесомых и абсолютно гладких блоков и веревок (характерная особенность всех марсианских конструкций) и быстро переправляет влюбленных через канал, пока ни один из них не успевает коснуться ни мачты, ни палубы. Много ли при этом Джузеппе выигрывает в нагрузке? Напоминаем: натяжение невесомой нити, перекинутой без трения через невесомый блок, одинаково с обеих сторон блока.

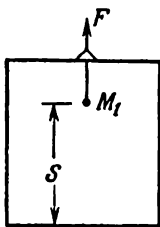


- 9.10. Космический путешественник собирается отправиться на Луну. У него есть пружинные весы и гири A массой 1 кг . Если подвесить эту гирю на пружине весов на Земле, они покажут 1 кг . Опустившись на некотором участке лунной поверхности, где ускорение свободного падения точно не известно (известно лишь, что оно примерно в шесть раз меньше, чем на Земле), космонавт подбирает камень B , который вытягивает на весах тот же самый 1 кг . Затем он подвешивает A и B на нити, перекинутой через блок, как показано на рисунке, и обнаруживает, что камень опускается с ускорением $1,2 \text{ м/сек}^2$. Чему равна масса камня B ?



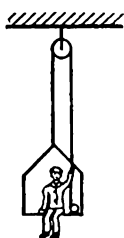
- 9.11. К потолку лифта, масса которого M_2 , подвешен груз массой M_1 . Приложенная сила F заставляет лифт двигаться с ускорением вверх [F больше $(M_1 + M_2)g$]. Груз M_1 находится на расстоянии S от пола лифта.

- Найдите ускорение лифта.
- Чему равно натяжение нити, которой груз привязан к потолку?
- Нить внезапно оборвалась. Чему равно ускорение лифта и груза M_1 в следующий момент?



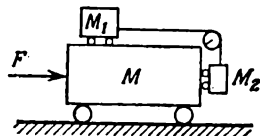
- Сколько времени пройдет от момента разрыва нити до удара груза M_1 об пол?

- 9.12. Маляр работает в подвесном кресле (см. рисунок). Вес его 72 кг . Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за веревку с такой силой, что его давление на кресло уменьшается до 40 кг . Само кресло весит 12 кг .

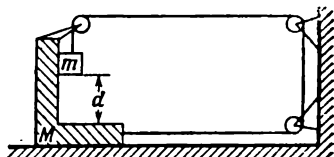


- Чему равно ускорение маляра и кресла?
- Чему равна полная нагрузка на блок?

- 9.13. Посмотрите на рисунок. Какую постоянную горизонтальную силу нужно приложить к M , чтобы M_1 и M_2 относительно M не двигались?



- 9.14. В системе, изображенной на рисунке, трение между любыми поверхностями отсутствует. Если грузику с массой $m = 150$ г, находящемуся над рамой на расстоянии $1,2$ м, позволить двигаться, то за какое время он пройдет это расстояние? Масса рамы $M = 1650$ г.



- 9.15. Груз, подвешенный на пружине, неподвижен. Затем он приводится в движение ударом, направленным снизу вверх, и в начальный момент времени его скорость равна единице. Масса и упругость пружины таковы, что уравнение движения имеет вид $\ddot{x} = -x$. Найдите максимальную высоту, которой достигнет груз, путем численного интегрирования уравнения движения.
- 9.16. Тело массой m движется прямолинейно. Движение тормозится силой, пропорциональной скорости тела, $F = -kv$. Найдите численным интегрированием x как функцию времени, если в начальный момент $t = 0$, $x = 0$ и $v = v_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое тело потеряет половину своей скорости, и максимальное расстояние x_m , которое пройдет тело.
- Примечание.* а) Подберите временной и линейный масштабы так, чтобы уравнение движения имело простые численные коэффициенты.
- б) Придумайте схему расчета (аналогичную приведенной в тексте «Лекций»), которая обеспечивала бы хорошую точность при сравнительно большом шаге Δt .
- в) Исходя из соображений размерности, выясните, как $t_{1/2}$ и x_m зависят от v_0 , k и m , а уравнение движения решите только для одного удобного значения v_0 , скажем для $v_0 = 1,00$ (в модифицированных единицах x и t).

- 9.17. Заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях в соответствии с уравнениями движения

$$\frac{dv_x}{dt} = -2v_y$$

и

$$\frac{dv_y}{dt} = 1 + 2v_x.$$

При $t = 0$ частица находится в точке $(0, 0)$ и скорость ее имеет составляющие $v_x = 1,00$ и $v_y = 0$. Определите тип движения с помощью численного интегрирования. Прочтите примечание (б) к предыдущей задаче.

- 9.18. Мина вылетает из ствола миномета со скоростью 300 м/сек под углом 45° к горизонту. Ее движение тормозится силой, пропорциональной кубу скорости ($F = -kv^3$). Коэффициент пропорциональности k таков, что при скорости 300 м/сек сила сопротивления вдвое превышает вес мины. Численным интегрированием найдите приближенные значения максимальной высоты, на которую поднимется мина, и расстояние от точки выстрела, на котором она упадет на землю. Сравните их с величинами, получающимися при отсутствии сопротивления воздуха.

К главе 10. Закон сохранения импульса

10. 1. В горизонтальном воздушном желобе (он описан в гл. 10 «Лекций», вып. 1, стр. 185) могут свободно двигаться два тела. Одно неподвижно, а другое налетает на него, и происходит абсолютно упругое столкновение, после чего тела разлетаются в противоположных направлениях с равными скоростями. Чему равно отношение их масс?
10. 2. Два одинаковых массивных тела движутся навстречу друг другу в горизонтальном воздушном желобе с одинаковыми по величине скоростями v и $-v$. Происходит почти упругое соударение, и они разлетаются в противоположные стороны с несколько меньшими скоростями. При столкновении теряется доля кинетической энергии $f \ll 1$. Если бы до столкновения одно из этих тел покоилось, какова была бы скорость второго тела после столкновения? (Эту маленькую остаточную скорость Δv легко выразить через v — конечную скорость тела, покоившегося до столкновения, и таким путем определить упругость пружинных буферов.)

Примечание. Если $x \ll 1$, то $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$.

10. 3. Спутник Земли массой 10 кг со средним поперечным сечением $0,50 \text{ м}^2$ движется по круговой орбите на высоте 200 км , где средний пробег молекул измеряется многими метрами и плотность воздуха равна $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3$. Приближенно будем считать соударения молекул со спутником абсолютно неупругими (молекулы не то чтобы прилипают к спутнику, но отскакивают от него с очень малыми относительными скоростями). Подсчитайте, какая тормозящая сила будет действовать на спутник за счет трения о воздух. Как будет зависеть эта сила от скорости спутника? Будет ли скорость спутника уменьшаться под действием всех приложенных к нему сил? (Учтите зависимость орбитальной скорости спутника от высоты круговой орбиты.)
10. 4. Ракета, первоначальная масса которой $M_0 \text{ кг}$, выбрасывает продукты сгорания топлива с постоянной скоростью v_0 (по отношению к ракете). В 1 сек выбрасывается $dm/dt = -r_0 \text{ кг/сек}$ газов.
- а) Рассчитайте ускорение ракеты в начальный момент, пренебрегая силой тяжести.
 - б) Если скорость истечения $v_0 = 2,0 \text{ км/сек}$, какую массу газа в секунду необходимо выбрасывать для создания тяги 10^5 кг ?
 - в) Запишите дифференциальное уравнение, которое связывает скорость ракеты с ее остаточной массой, и, если можете, решите это уравнение.
10. 5. Если два тела движутся по одной прямой, то существует такая система координат, в которой импульс одного тела равен по величине и противоположен по направлению импульсу другого тела. Это значит, что суммарный импульс двух тел в такой системе равен нулю. Такая система отсчета называется системой центра масс (сокращенно ц. м.). Если массы тел равны m_1 и m_2 , а тела движутся со скоростями v_1 и v_2 соответственно, то покажите, что скорость системы ц. м. равна
- $$v_{\text{ц. м.}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$
10. 6. Обобщите результат задачи 10.5 на произвольное число тел, движущихся по одной прямой, т. е. найдите скорость системы координат, в которой суммарный импульс всех этих тел равен нулю.
10. 7. Пусть T — полная кинетическая энергия двух тел в задаче 10.5, а $T_{\text{ц. м.}}$ — их полная кинетическая энергия

в системе ц. м. Покажите, что

$$T = T_{\text{ц. м.}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\text{ц. м.}}^2.$$

10. 8. Можете ли вы обобщить результат задачи 10.7 на произвольное число тел?
10. 9. Нейтрон с кинетической энергией E испытывает лобовое столкновение с покоящимся ядром C^{12} и отскакивает от него после абсолютно упругого соударения в направлении, прямо противоположном начальному направлению своего движения. Как изменится кинетическая энергия нейтрона после соударения?
- 10.10. Скорость ружейной пули можно измерить с помощью баллистического маятника: пуля с известной массой m и неизвестной скоростью v попадает в покоящийся деревянный брусок массы M , подвешенный на нити длиной L , и застревает в нем. Брусок при этом приходит в движение. Амплитуду его колебаний x можно измерить и, используя закон сохранения энергии, определить тем самым скорость бруска сразу после попадания в него пули. Выразите скорость пули через m , M , L и x .

К главе 11. Векторы

11. 1. Если три вектора заданы равенствами $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, получите
- $\mathbf{a} + \mathbf{b}$,
 - $\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
 - a_x ,
 - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{l}$,
 - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
 - $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.
11. 2. Велосипедист едет со скоростью 10 км/час в северном направлении, и ему кажется, что ветер (который дует со скоростью 6 км/час откуда-то с северо-востока) направлен почти навстречу ему, под углом 15° к линии его движения.
- Определите истинное направление ветра.
 - Найдите кажущееся направление ветра с точки зрения велосипедиста, который едет в обратном направлении с той же скоростью 10 км/час.

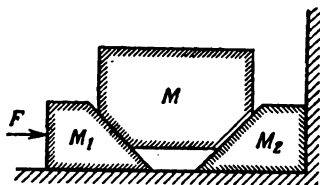
11. 3. Вы находитесь на судне, которое идет на восток с постоянной скоростью 15 узлов. Корабль, идущий постоянным курсом с известной скоростью 26 узлов, находится в 6 милях южнее. Позднее он проходит у вас за кормой, причем расстояние наибольшего сближения составляет 3 мили.
- а) Найдите курс этого корабля.
 - б) Какое время прошло между двумя моментами, описанными в задаче?
11. 4. Колесо радиусом R катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Колесо расположено в вертикальной плоскости, а ось его движется горизонтально с постоянной скоростью v относительно поверхности. Вычислите величину и направление скорости произвольной точки на ободе колеса. Убедитесь, что скорости точек на ободе таковы, как если бы колесо вращалось вокруг мгновенной оси, проходящей через точку соприкосновения колеса с горизонтальной поверхностью.
11. 5. Моторная лодка, скорость которой относительно воды равна v , движется по прямолинейному участку реки. Скорость течения постоянна и равна u . Сперва лодка поднимается вверх по течению на расстояние d от своей стоянки и возвращается обратно, а затем отправляется в пункт на противоположном берегу реки как раз напротив стоянки и возвращается обратно. Ширина реки также равна d . Для простоты будем предполагать, что лодка все время движется с постоянной скоростью, и на разворотах время не теряется. Если t_v — время движения вдоль реки, t_A — время движения поперек, а t_L — время, за которое лодка прошла бы расстояние $2d$ по озеру, то:
- а) чему равно отношение t_v/t_A ?
 - б) чему равно отношение t_A/t_L ?
11. 6. Человек, стоящий на берегу реки, хочет переправиться на другой берег, в прямо противоположную точку. Он может сделать это двумя способами: 1) плыть все время под углом к течению, так что результирующая скорость будет все время перпендикулярна берегу; 2) плыть прямо к противоположному берегу, а расстояние, на которое его снесет течением, пройти затем по берегу пешком. Плавает он со скоростью 2,5 км/час, а идет со скоростью 4 км/час. Скорость течения 2 км/час. Какой способ позволит переправиться скорее?
11. 7. На горизонтальной плоскости установлены два одинаковых клина с углами наклона 45° и одинаковыми массами

$M_1 = M_2 = 8,0$ кг. Все плоскости абсолютно гладкие, как и у груза с массой $M = 384$ кг, который требуется поднять с помощью этих клиньев. Оба клина лежат на гладкой горизонтальной плоскости; один из них упирается в вертикальную стену, а к другому приложена горизонтальная сила $F = 592$ кГ.

а) Найдите величину и направление ускорения подвижного клина M_1 .

б) Найдите величину и направление ускорения груза M .

в) С какой силой давит неподвижный клин M_2 на груз M ?



11. 8. На конце нити висит материальная точка массой m , а другой конец нити прикреплен к шаровому шарниру, в котором отсутствует трение. Материальная точка приводится в движение по круговому пути, расположенному в горизонтальной плоскости, отстоящей от шарнира на расстоянии H . Найдите период такого движения.

11. 9. Обобщите результаты задач 10.5 и 10.8 на трехмерное движение, используя векторную символику и обозначение

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

11.10. «Частица» массой $m_1 = 2$ кг, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ м/сек, испытывает абсолютно неупругое столкновение с другой частицей, масса которой $m_2 = 3$ кг, а скорость $\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ м/сек. Найдите скорость получившейся составной частицы.

11.11. Найдите кинетическую энергию частиц, описанных в задаче 11.10, в системе ц. м. до их столкновения.

11.12. Тело массой 1 кг, движущееся точно на север со скоростью 6 м/сек, сталкивается с покоящимся телом, масса которого 2 кг. После соударения тело с меньшей массой движется под углом 45° к направлению своего первоначального движения (на северо-восток) со скоростью 2,82 м/сек.

а) Чему равна скорость тела с массой 2 кг?

б) Какая доля кинетической энергии в системе ц. м. «пропала» из-за неупругости соударения?

в) На какой угол отклонилось более легкое тело в системе ц. м.?

- 11.13. Движущаяся частица испытывает абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Покажите, что после соударения частицы разлетаются под прямым углом.

При анализе двухчастичных столкновений полезно использовать следующий подход:

- 1) Найдите $v_{ц.м.}$, т. е. скорость системы ц. м.
- 2) Вычтите $v_{ц.м.}$ из v_1 и v_2 (скоростей первой и второй частиц до столкновения), чтобы получить начальные скорости в системе ц. м., т. е. v'_1 и v'_2 .
- 3) Импульсы обеих частиц теперь равны по величине и противоположны по направлению.
- 4) Происходит столкновение, в результате которого:
 - а) поворачивается линия относительного движения частиц 1 и 2;
 - б) абсолютные величины векторов v'_1 и v'_2 увеличиваются, уменьшаются или остаются неизменными в зависимости от того, выделяется, поглощается или остается неизменной энергия в процессе столкновения.
- 5) Прибавьте $v_{ц.м.}$ к скоростям v'_1 и v'_2 в системе ц. м. после соударения. Получатся скорости v_1 и v_2 после столкновения в «лабораторной» системе.

- 11.14. Два маленьких шарика A и B движутся под действием силы тяжести с ускорением $9,8 \text{ м/сек}^2$. Масса каждого шарика равна 1 г (ускорение считать направленным по оси z).

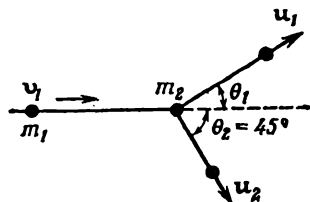
Заданы следующие начальные условия при $t = 0$:

$$r_a(0) = 7\mathbf{i} + 4,9\mathbf{k} \text{ м}, \quad v_a(0) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \text{ м/сек},$$

$$r_b(0) = 49\mathbf{i} + 4,9\mathbf{k} \text{ м}, \quad v_b(0) = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \text{ м/сек}.$$

Найдите $r_a(t)$ и $r_b(t)$ для любого момента времени $t > 0$.

- 11.15. Частица массой m_1 налетает со скоростью v_1 на покоящуюся частицу, масса которой $m_2 = 3m_1$. Происходит абсолютно упругое соударение, после которого частица m_2 движется под углом $\theta_2 = 45^\circ$ к первоначальному направлению движения частицы m_1 (см. рисунок). Требуется найти θ_1 — угол отклонения первой частицы и величины скоростей u_1 и u_2 .



- 11.16. Частица массой M налетает на покоящуюся частицу массой m ($m < M$), и происходит упругое столкновение. Найдите максимальный возможный угол отклонения налетающей частицы.
- 11.17. Частица массой m упруго сталкивается с покоящейся частицей, масса которой $M > m$, и отклоняется от первоначального направления на 90° . Под каким углом θ к направлению первоначального движения полетит более тяжелая «частица отдачи»?
- 11.18. Пусть в столкновении, описанном в предыдущей задаче, теряется доля $1 - \alpha^2$ кинетической энергии в системе ц.м. Чему равен в этом случае угол вылета частицы отдачи, покоящейся до столкновения?
- 11.19. Частица с массой 1 кг движется так, что ее положение в любой момент времени определяется радиусом-вектором
- $$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} \left(t + \frac{t^2}{2} \right) - \mathbf{k} \left(\frac{4}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi t}{2}.$$
- а) Определите положение, скорость, ускорение и кинетическую энергию частицы в моменты времени $t = 0$ и $t = 1 \text{ сек.}$
- б) Получите выражение для силы, которая заставляет частицу двигаться.
- в) Найдите радиус кривизны траектории частицы в момент времени $t = 1 \text{ сек.}$
- 11.20. В начальный момент времени частица находится в точке $\mathbf{r}_0$ и имеет скорость $\mathbf{v}_0$. Определите ее дальнейшее движение под действием силы тяжести.
- 11.21. Используйте векторную алгебру для нахождения расстояния по дуге большого круга между двумя точками земной поверхности, широта и долгота которых равны соответственно (λ_1, φ_1) и (λ_2, φ_2) .
Примечание. Используйте прямоугольную систему координат с началом в центре Земли. Одну ось этой системы направьте вдоль земной оси, другую — в направлении, определяемом углами $\lambda = 0$, $\varphi = 0$, а третью — под углами $\lambda = 0$, $\varphi = 90^\circ$. (Долгота пусть меняется от 0 до 360° с востока на запад.)
- 11.22. Чему равны величина и направление ускорения Луны:
- а) в новолуние?

- б) в первую четверть?
- в) в полнолуние?

Примечание. Расстояние от Земли до Солнца равно $1,5 \cdot 10^8$ км, расстояние от Земли до Луны $3,85 \cdot 10^5$ км, масса Солнца составляет $3,33 \cdot 10^5$ земных масс.

К главе 12. Характеристики силы

12. 1. Кирпич массой m скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол θ . Если коэффициент трения скольжения $\mu < \operatorname{tg} \theta$, то с каким ускорением будет двигаться кирпич:

- а) вверх по плоскости?
- б) вниз по плоскости?
- в) под углом φ к горизонтальной линии на плоскости?

(Представьте себе, что к плоскости приложена гладкая линейка, вдоль которой и движется кирпич. Используйте в наклонной плоскости координаты x и y ; x направьте по горизонтали, а y — вверх по наклонной плоскости.)

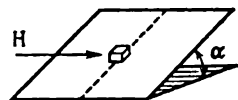
12. 2. Пусть в предыдущей задаче $m = 1,00$ кг, $\mu = 0,20$, а $\theta = 30^\circ$. Если в начальный момент кирпич движется по наклонной плоскости вверх со скоростью $3,00$ м/сек, то:

- а) как далеко вверх он поднимется?
- б) сколько времени ему понадобится, чтобы попасть в высшую точку и вернуться в исходную?
- в) сколько энергии он потеряет за это время?

12. 3. Тело весом W покоится на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α .

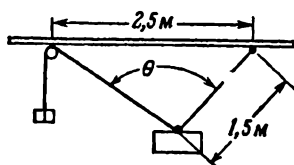
- а) Коэффициент статического трения $\mu = 2 \operatorname{tg} \alpha$; найдите минимальную горизонтальную силу $H_{\min}$, которая приведет тело в движение (см. рисунок).

- б) В каком направлении начнет двигаться тело?



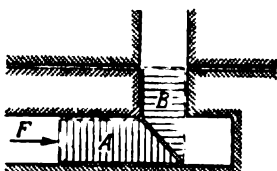
12. 4. Груз весом 1 кГ подвешен на двух нитях. Первая нить длиной $1,5$ м привязана к кольцу, которое скользит по горизонтальному стержню (см. рисунок). Коэффициент трения между кольцом и стержнем равен $0,75$. Ко второй нити привязан грузик, и она перекинута через блок, прикрепленный к стержню на $2,5$ м левее кольца. Груз,

подвешенный ко второму концу нити, увеличивают до тех пор, пока кольцо не начинает скользить. Найдите:

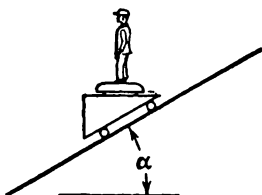


- а) вес груза W , при котором кольцо начнет скользить,
- б) натяжение нити длиной $1,5 \text{ м}$ и угол θ .

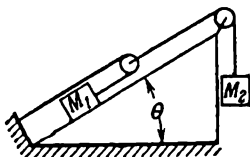
12. 5. На рисунке показан в разрезе простейший вертикальный замок. Нижняя его часть A может двигаться по горизонтальному пазу. Стенки паза абсолютно гладкие, но плоскости соприкосновения брусков A и B , наклоненные под 45° к горизонтали, шероховаты, и коэффициент трения между ними равен μ . Какова минимальная сила F , которую необходимо приложить, чтобы привести части замка в движение, если масса задвижки B равна m ?



12. 6. Один неосторожный молодой человек проводит следующий опыт. Он ставит плоские медицинские весы на деревянную подставку с роликами, которая может скатываться без трения по наклонной плоскости (см. рисунок). Затем сам становится на весы и катится вниз, наблюдая за показаниями весов. Чему равен угол наклона плоскости, если весы показывают в этот момент 120 фунтов, а молодой человек весит 160 фунтов?



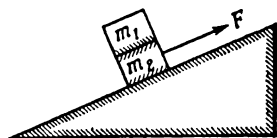
12. 7. В устройстве, показанном на рисунке, груз M_1 скользит без трения по наклонной плоскости; $\theta = 30^\circ$, $M_1 = 400 \text{ г}$, $M_2 = 200 \text{ г}$. Найдите ускорение груза M_2 и натяжение нитей.



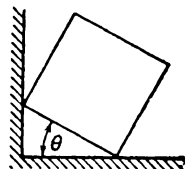
12. 8. Длина наклонной плоскости, изображенной на рисунке, 130 см , верхний ее конец расположен на 50 см выше ниж-

него. На этой плоскости лежат один на другом два бруска с массами m_1 (200 г) и m_2 (60 г). Коэффициент статического трения между брусками равен 0,5, а коэффициент трения скольжения между плоскостью и нижним бруском 0,33. К нижнему бруску приложена сила F , параллельная наклонной плоскости.

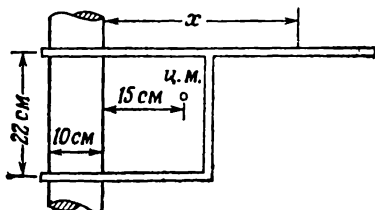
- Чему равно ускорение нижнего бруска в тот момент, когда верхний только-только начинает соскальзывать с него?
- Чему равно значение силы F перед началом этого соскальзывания?



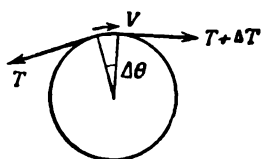
12. 9. Куб массой M прислонен к стене в наклонном положении, как показано на рисунке. Между кубом и стеной трение отсутствует, но между кубом и полом оно есть, и величины коэффициента трения μ как раз еле хватает на то, чтобы куб не начал скользить. Если $0 < \theta < 45^\circ$, найдите это минимальное значение коэффициента трения как функцию θ . Проверьте свой ответ, рассмотрев предельные случаи $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow 45^\circ$, и рассчитайте значение θ , при котором $\mu = 1$.



- 12.10. Кронштейн для подвешивания небольших грузов, который легко устанавливается на любой высоте, очень удобен. Один такой кронштейн изображен на рисунке, там же приведены и основные размеры. Он может передвигаться по вертикальной стойке и удерживается на одном уровне силой трения. Если коэффициент статического трения между кронштейном и стойкой равен 0,30, а вес груза, подвешенного на расстоянии x от стойки, в 50 раз превышает вес самого кронштейна, каково будет минимальное значение x , при котором кронштейн не соскальзывает по столбу?



- 12.11. а) Веревка, движущаяся с небольшой скоростью v , трется о цилиндрический столб (см. рисунок). Угол $\Delta\theta$ много меньше 1 рад . Если натяжение веревки с одной стороны столба равно $T + \Delta T$, а с другой T , то чему равна разность ΔT , возникающая за счет трения?



- б) Проинтегрируйте результат для ΔT , полученный в пункте (а), и найдите отношение натяжений на двух концах веревки, которая заворачивается вокруг столба на конечный угол α и натянута так, что начинает проскальзывать.

- 12.12. Тело находится у основания абсолютно гладкой пластинки длиной 1 м , наклоненной под углом 20° к горизонтالي. Пластика начинает двигаться с горизонтальным ускорением $a = 4,00 \text{ м/сек}^2$. За какое время тело достигнет верхнего края пластинки?

- 12.13. Напишите размерности
- электрического поля E ;
 - магнитной индукции B ;
 - отношения E/B ;
 - гравитационного поля.

- 12.14. Заряженная частица движется в плоскости, перпендикулярной магнитному полю B . Покажите, что движение совершается по круговой орбите, и найдите радиус орбиты.

- 12.15. Найдите время одного оборота частицы из предыдущей задачи. Ответ на этот вопрос необходимо знать при управлении циклотроном. Почему?

- 12.16. Частица с массой m и зарядом q движется в электромагнитном поле, у которого от нуля отличны только компоненты E_y и B_z .

- Напишите уравнение движения частицы.
- Примените преобразование Галилея к координатам частицы: $x' = x - (E_y/B_z)t$,
 $y' = y$,
 $z' = z$.

- в) Какое заключение после этого можно сделать о движении частицы во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях?

К главе 14. Работа и потенциальная энергия

14. 1. Сила $\mathbf{F} = 1,5y\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j} - 0,2(x^2 + y^2)\mathbf{k}$ ньютон действует на материальную точку массой 1,00 кг. При $t = 0$ положение частицы описывается радиусом-вектором $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ м, и она движется со скоростью $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ м/сек. Найдите для $t = 0$:
- а) силу, которая действует на частицу;
 - б) ускорение частицы;
 - в) ее кинетическую энергию;
 - г) скорость изменения кинетической энергии.
14. 2. Найдите приближенно положение, скорость и кинетическую энергию частицы из предыдущей задачи в момент $t = 0,01$ сек.
14. 3. Частица движется от точки $(0, -1,0)$ в точку $(0, +1,0)$ без трения под действием той же, что и в задаче 14.1, силы $\mathbf{F}$ (плюс некоторая сила, удерживающая частицу и не дающая ей «сойти с пути»). Найдите работу, совершенную силой $\mathbf{F}$, для двух вариантов траектории:
- а) прямая вдоль оси y ,
 - б) окружность в плоскости $z - y$.
- Является ли поле силы $\mathbf{F}$ консервативным?
14. 4. Материальная точка массой 6,0 кг может двигаться вдоль оси x без трения. В каждом из перечисленных ниже случаев она начинает движение при $x = 0$ и $t = 0$.
- 1) Точка проходит расстояние, равное 3 м, под действием силы $F = (3 + 4x)$ ньютон (x в метрах).
 - а) Какую скорость она при этом приобретет?
 - б) Каково ее ускорение в конце пути?
 - в) Чему равна мощность, затрачиваемая на ее движение в этот момент?
 - 2) Точка движется в течение 3 сек под действием силы $F = (3 + 4t)$ ньютон (время в секундах). Ответьте на вопросы (а)—(в) для этого случая.
14. 5. Сферическая оболочка радиусом 0,5 м равномерно заряжена до потенциала 10^6 в. Найдите ее заряд.
14. 6. Как правило, конденсатор состоит из двух металлических тел, несущих заряды разного знака. Емкость C определяется как отношение заряда на одном из тел к разности потенциалов между ними:

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1} \phi.$$

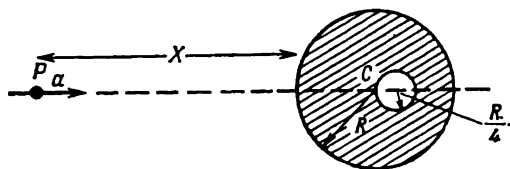
Определите емкость двух концентрических сфер радиусами A и B .

14. 7. Если бы Земля несла нескомпенсированный электрический заряд 1 кулон, чему был бы равен ее потенциал?
14. 8. Автомобиль весит 1000 кг. Максимальная мощность, развиваемая его двигателем, равна 120 кВт. Пусть эта максимальная мощность достигается при скорости 60 км/час. Каково ускорение автомобиля при этой скорости?
14. 9. Гибкий кабель длиной L и весом M кг на метр перекинут через блок, масса и радиус которого пренебрежимо малы. Трение в блоке отсутствует. В начальный момент кабель находится в положении равновесия, из которого его выводит слабый рывок за один из концов. Более длинная часть начинает перевешивать, и кабель с ускорением соскальзывает с блока. Найдите скорость кабеля в тот момент, когда его конец проходит через блок.
- 14.10. Вода (плотность ее 1 г/см³) прокачивается через гладкий шланг и вырывается из его наконечника, поперечное сечение которого равно 35 см². Струя направлена под углом 30° к горизонту и взлетает на 4,8 м выше выходного отверстия. Подающий шланг насоса погружен в большой резервуар, уровень воды в котором на 2,4 м ниже наконечника. Если полный к. п. д. насоса вместе с электромотором составляет 60%, какую мощность потребляет мотор?
- 14.11. Мировые рекорды в толкании ядра, метании диска и копья составляли в 1960 г. 19,40, 59,96 и 86,09 м соответственно. Массы этих метательных снарядов равны соответственно 7,257, 1,99 и 0,806 кг. Округлите эти цифры и сравните работу, затраченную каждым спортсменом в рекордном броске для трех снарядов, предполагая каждый раз, что снаряд вылетает под углом 45° с уровня 1,8 м над землей. Сопротивлением воздуха пренебрегите.
- 14.12. Мощность двигателя машины 85 л. с., а вес машины 1200 кг. При движении с постоянной скоростью 48 км/час мощность, развиваемая двигателем, равна всего 20 л. с. Найдите величину самого крутого уклона, на который эта машина может подниматься с такой скоростью, считая, что сопротивление трения от наклона дороги не зависит.

(Величину уклона характеризуйте либо углом по отношению к горизонтали, либо какой-нибудь функцией этого угла).

- 14.13.** Масса M некоего сферического тела радиусом R равномерно распределена по его объему. Каков гравитационный потенциал и напряженность гравитационного поля, создаваемого этим телом на разных расстояниях от его центра? Представьте результат графически.
- 14.14.** Чашка пружинных весов весит $0,025 \text{ кГ}$, а упругость пружины составляет $15,3 \text{ ньютон/м}$. Грузик массой $m = 50 \text{ г}$ падает на чашку с высоты $h = 9,0 \text{ см}$. Соударение абсолютно неупругое. На какое максимальное расстояние опустится грузик? Отсчет ведется от точки, из которой он начал падать.
- 14.15.** Пружина с упругой постоянной k растянута под действием постоянной силы F и находится в равновесии. Считая растяжение по-прежнему пропорциональным силе, показать, что при смещениях относительно нового положения равновесия упругая постоянная та же.
- 14.16.** Небольшая тележка движется без трения по наклонному пути, в нижней точке которого установлена «мертвая петля» радиусом R . С какой высоты H должна начать движение тележка, чтобы пройти петлю, не сорвавшись?
- 14.17.** Материальная точка покоится в верхней точке абсолютно гладкой сферы радиусом R , а затем начинает скользить вниз по поверхности сферы под действием силы тяжести. Какое расстояние пройдет она вниз от начальной точки прежде, чем оторвется от сферы?
- 14.18.** Небольшое тело массой m движется под влиянием гравитационного притяжения по эллиптической орбите вокруг массивного тела массы M . Тяжелое тело можно считать неподвижным. Большая полуось орбиты равна a , ее эксцентриситет равен e . Вычислите полную энергию тела E (кинетическую плюс потенциальную). Обратите внимание на то, что результат не зависит от эксцентриситета.
- 14.19.** а) Покажите, что площадь эллипса равна πab .
б) Получите третий закон Кеплера для эллиптических орбит.
в) Покажите, что орбиты всех тел, у которых на единицу массы приходится одинаковая энергия, соответствуют равным периодам обращения.
(Для простоты предполагайте, что $m \ll M$.)

- 14.20. Скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло гравитационное поле Земли, равна примерно 11 км/сек . Если межпланетный корабль после сгорания всего топлива (при выходе из атмосферы) двигался со скоростью 12 км/сек , какова будет его скорость на расстоянии 10^6 км от Земли?
- 14.21. Двигатели космического корабля прекращают работу где-то в районе Земли. Какую минимальную скорость должен набрать космический корабль, чтобы покинуть пределы Солнечной системы, имея «на выходе» скорость 16 км/сек относительно Солнца? Скорость Земли в ее орбитальном движении равна 30 км/сек .
- 14.22. Космический корабль из предыдущей задачи должен покинуть Солнечную систему в *определенном направлении*. Какова *максимальная* скорость запуска с Земли, которая может для этого потребоваться?
- 14.23. Требуется вывести космический корабль на околосолнечную орбиту с перигелием $0,01 \text{ А.Е.}$ и тем же периодом обращения по орбите, который имеет Земля (1 год). С какой скоростью и в каком направлении относительно линии Земля—Солнце нужно запустить этот корабль с Земли? Орбитальная скорость Земли равна 30 км/сек .
- 14.24. Внутри сферического тела радиусом R и плотностью ρ имеется сферическая полость радиусом $R/4$. Центр ее находится на расстоянии $R/4$ от точки C —центра большой сферы, на линии PC , соединяющей C с точкой P , которая находится на расстоянии X от поверхности большой сферы (см. рисунок). Найдите ускорение свободного падения a в точке P .



К главе 15. Специальная теория относительности

15. 1. Используя формулы преобразований Лоренца, выразите x , y , z и t через x' , y' , z' и t' .
15. 2. Проанализируйте работу «световых часов», которые ориентированы параллельно направлению своего движения. Схема этого устройства приведена на фиг. 15.3 «Лекций» (вып. 2, стр. 274). Не забудьте учесть лоренцево сокращение.
15. 3. В верхних слоях атмосферы рождается μ -мезон, движущийся со скоростью $v = 0,99 c$. До распада он успевает пролететь 5,00 км.
- а) Каково время жизни μ -мезона, наблюдаемое нами, и чему оно равняется в системе координат, связанной с самим μ -мезоном?
 - б) Чему равна толщина слоя атмосферы, пройденного μ -мезоном, измеренная в его «собственной» системе координат?
15. 4. Производство электроэнергии Соединенными Штатами в 1962 г. составляло $2,15 \cdot 10^{12}$ кВт·ч.
- а) Какой массе вещества соответствует эта энергия?
 - б) Представим себе, что вся эта энергия вырабатывалась бы за счет превращения дейтерия в гелий, причем разность масс использовалась бы целиком (в действительности часть ее идет на испускание нейтрино). Сколько тяжелой воды пришлось бы расходовать каждую секунду для обеспечения такого годового производства энергии?

Примечание. $M_H = 2,0147$ а. е. м,

$M_{He^4} = 4,0039$ а. е. м.

15. 5. Мощность солнечного излучения, поглощаемая в земной атмосфере, составляет примерно $1,4$ кВт/м². Если вся эта энергия получается на Солнце за счет превращения

обычного водорода в гелий, то сколько же тонн водорода в секунду [сгорает] на Солнце? (Потерей на испускание нейтрино пренебрегите.)

15. 6. Частица с массой покоя m_0 движется вдоль оси x так, что ее положение в каждый момент времени задается формулой

$$x = \sqrt{q^2 + c^2 t^2} - b.$$

Чему равна сила, под действием которой частица совершает такое движение?

15. 7. а) Выразите ускорение свободного падения в единицах свет. год/год².
 б) Космический корабль движется с таким ускорением, что его экипаж ощущает такую же постоянную силу тяжести, что и на Земле. С точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно точки, в которой корабль находился в момент $t = 0$, такой разгон продолжается 5,00 лет. На какое расстояние улетит корабль за это время и какова будет его скорость в конце разгона?

К главе 16. Релятивистская энергия и релятивистский импульс

16. 1. Напишите преобразование Лоренца в дифференциальной форме: $dx = \gamma(dx' + \beta c dt')$ и т. д. и вычислите таким образом dx/dt и dy/dt , выразив эти производные через v'_x , V и пр.
16. 2. Частица движется вдоль оси x со скоростью v_x и ускорением a_x . Система координат S' движется по отношению к исходной со скоростью v . Чему равны скорость и ускорение частицы в этой системе?
16. 3. Проверьте формулу $m_w = m_0 \sqrt{1 - (u^2/c^2)}$, полученную в «Лекциях» (вып. 2, стр. 294).
16. 4. Частица с массой покоя m_0 , движущаяся со скоростью $4c/5$, испытывает неупругое соударение с покоящейся частицей такой же массы.
 а) Чему равна скорость образовавшейся составной частицы?
 б) Чему равна ее масса покоя?
16. 5. Ускоритель «беватрон» в Беркли проектировался с таким расчетом, чтобы он мог разгонять протоны до энергии, достаточной для образования пар протон — антипротон в

реакции $p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$. Так называемая пороговая энергия этой реакции соответствует случаю, когда четыре частицы, перечисленные в правой части формулы реакции, движутся вместе как одна частица с массой покоя $M = 4m_p$. Если протоны мишени до соударения покоятся, чему равна пороговая кинетическая энергия бомбардирующих протонов?

К главе 17. Пространство-время

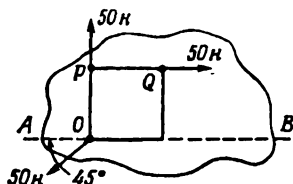
17. 1. Масса покоя протона составляет $m_p = 938$ Мэв. В космических лучах встречаются протоны с энергией порядка 10^{10} Гэв (1 Гэв $= 10^3$ Мэв); появление их удается определить с помощью разных косвенных методов. Пусть протон с такой энергией пересекает Галактику по диаметру. Этот диаметр равен 10^5 световых лет. Сколько времени потребуется протону на это путешествие «с его точки зрения»?
17. 2. Покажите, что энергия покоя электрона $m_e c^2 = 0,511$ Мэв.
17. 3. Покоящийся π -мезон ($m_\pi = 273 m_e$) распадается на μ -мезон ($m_\mu = 207 m_e$) и нейтрино ($m_\nu = 0$). Выразите в Мэв кинетическую энергию и импульс μ -мезона и нейтрино.
17. 4. Изучается движение заряженной частицы в магнитном поле. Если q измеряется в зарядах электрона, p — в Мэв, а B — в гс, то как связаны между собой величины p , B и R ? Обозначьте $q = Zq_e$.
17. 5. Строится циклотрон, ускоряющий протоны до кинетической энергии 150 Мэв. Напряженность магнитного поля в нем составляет $1,00 \cdot 10^4$ гс.
- Чему должен быть равен радиус магнита?
 - Какова должна быть частота сигнала, подаваемого на ускоряющие электроды?
 - На сколько процентов должна меняться эта частота в процессе ускорения данной частицы из-за наличия релятивистских эффектов?

К главе 18. Двумерные вращения

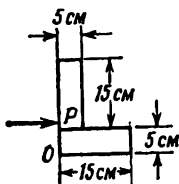
18. 1. Сила $\mathbf{F} = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$ ньютон приложена к точке $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ м. Найдите:
- момент силы относительно начала координат;
 - плечо силы;
 - составляющую силы, перпендикулярную $\mathbf{r}$.

18. 2. На какой широте скорость точки земной поверхности за счет суточного вращения Земли на 200 м/сек меньше, чем в Лос-Анджелесе?

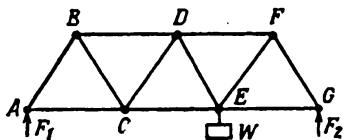
18. 3. На плоскую стальную пластинку, плавающую в ртути, действуют три силы, приложенные к трем разным углам квадрата со стороной $0,1 \text{ м}$ (см. рисунок). Найдите силу, которая одна может удержать эту пластинку в положении равновесия. Найдите величину, направление и точку приложения этой силы (точка расположена на линии AB).



18. 4. На рисунке показан уголок, сделанный из металлического листа постоянной толщины. Он лежит на гладком горизонтальном столе. После удара, направление которого указано на рисунке, уголок начинает двигаться по поверхности стола *без вращения*. На каком расстоянии от вершины O находится точка, в которой был нанесен удар?



18. 5. На рисунке изображена конструкция фермы моста. Она состоит из твердых невесомых стержней равной длины, соединенных между собой шарнирно. Трение в шарнирах отсутствует. Найдите силы реакции F_1 и F_2 и усилие в стержне DF , если в точке E подвешен груз весом W .

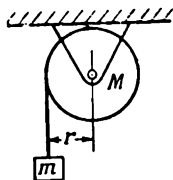


18. 6. Вычислите моменты инерции следующих твердых тел, каждое из которых имеет массу m :

- Тонкий прямолинейный однородный стержень длиной L . Момент нужно вычислить относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.
- Тот же стержень, но ось проходит через его середину.
- Тонкостенный полый круговой цилиндр радиусом r : относительно оси цилиндра.

- г) Сплошной круговой цилиндр радиусом r ; относительно оси цилиндра.

18. 7. Груз массой m подвешен на нити, обмотанной вокруг сплошного цилиндра массой M и радиусом r . Цилиндр может вращаться вокруг своей оси без трения (см. рисунок). Найдите ускорение груза m .



18. 8. Груз массой m движется по горизонтальной гладкой поверхности стола. К грузу привязана нить, проходящая вниз через маленькое отверстие в столе. В начальный момент длина конца нити, находящегося на поверхности стола, равна r_1 , а груз m движется по кругу радиусом r_1 со скоростью v_1 . Затем за нить тянут снизу, и длина конца, оставшегося на поверхности стола, сокращается до r_2 .

Найдите:

- скорость груза v_2 в конечном состоянии;
- работу, совершенную силой, которая тянула нить под стол;
- величину силы, которую необходимо приложить к нижнему концу нити, чтобы радиус окружности, по которой движется m , оставался постоянным.

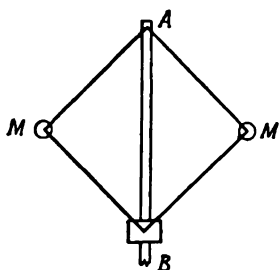
Используйте принцип виртуальной работы.

18. 9. Найдите момент количества движения планеты массой m , которая движется по круговой орбите радиусом R . Используя этот результат, покажите, что из-за приливов, тормозящих вращение Земли, расстояние между Луной и Землей с течением времени будет увеличиваться (хотя и очень медленно). Обсудите еще вопрос о сохранении энергии в системе Земля — Луна.

- 18.10. Решите задачу 4.9, используя следующее условие: в положении статического равновесия результирующая сила и результирующий момент, приложенные к телу, должны равняться нулю.

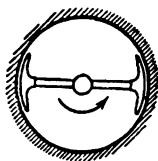
- 18.11. Центробежный регулятор, показанный на рисунке, должен выключать машину, когда скорость вращения вала превосходит 120 оборотов в минуту. Управляющая обойма

С весит 4 кГ и скользит без трения по вертикальному валу АВ. Выключение происходит, когда расстояние АС сокращается до 43 см. Длина каждого из звеньев регулятора равна 30 см, их можно считать невесомыми, трение



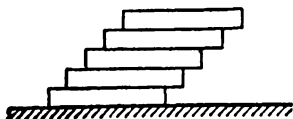
в соединительных шарнирах отсутствует. Чему должна равняться масса грузиков М, чтобы регулятор работал в соответствии с техническим заданием?

- 18.12. На вертикальный вал простого регулятора скорости (см. схему) перпендикулярно ему насажен горизонтальный стержень, по которому могут свободно скользить тяжелые тормозные колодки. Во время вращения вала колодки прижимаются к внутренней поверхности неподвижного тормозного цилиндра (барабана). Масса каждой колодки равна m , толщина их пренебрежимо мала по сравнению с радиусом барабана r , а коэффициент трения скольжения между колодками и барабаном равен μ . Выведите формулу, которая выражала бы мощность, необходимую для вращения вала, через m , r , μ и ω — угловую скорость вращения вала.



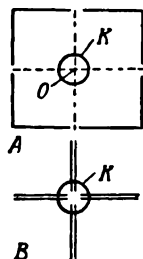
- 18.13. Однородный брусок длиной L лежит на гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). Сверху на него накладываются такие же бруски так, что их боковые грани образуют одну плоскость, а торец каждого следующего бруска смещается по отношению к предыдущему на величину L/a (a — целое число). Сколько брусков удастся уложить, прежде чем все сооружение опрокинется?

Покажите, что, если не ограничивать себя ни числом брусков, ни способом их укладки, верхний брусок можно сдвинуть относительно нижнего на сколь угодно большое расстояние.



К главе 19. Центр масс; момент инерции

19. 1. Восемь тонких однородных стержней образуют плоский квадрат, поддерживаемый невесомой рамкой (показана пунктиром на рисунке А). Длина каждого стержня равна L , а масса M . Квадрат свободно вращается без трения вокруг оси O , перпендикулярной его плоскости, с угловой скоростью ω_0 рад/сек. В процессе вращения внутренний механизм K , соединенный с рамкой и имеющий постоянный момент инерции $\frac{40}{3} ML^2$, складывает квадрат в крест, изображенный на рисунке В. Какую он при этом затрачивает энергию?



19. 2. Упругий момент, создаваемый закручиваемой нитью, пропорционален углу закручивания: $\tau_{\text{нити}} = -k\theta$.

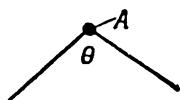
- Покажите, что потенциальная энергия такой нити, закрученной на угол θ , равна $\frac{1}{2}k\theta^2$.
- Момент, действующий на рамку гальванометра, имеет вид

$$\tau = nABi,$$

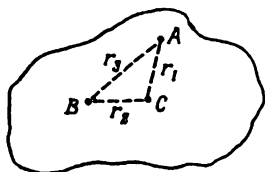
где i — ток, текущий через рамку; n — число витков в рамке; B — магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом гальванометра.

Для измерения заряда конденсатора его разряжают через рамку гальванометра и отмечают максимальный угол отклонения. При этом разряд происходит так быстро, что за то время, пока течет ток, рамка не успевает существенно отклониться от начального положения $\theta = 0$. Пренебрегая трением и учитывая, что $|i| = |dq/dt|$, покажите, что максимальный угол отклонения пропорционален первоначальному заряду конденсатора.

19. 3. Прямолинейная однородная проволока длиной L и массой M согнута посередине под углом θ . Чему равен ее момент инерции относительно оси, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости проволоки?

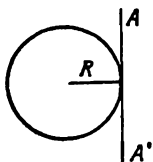


19. 4. Металлическая пластинка неправильной формы, но постоянной толщины имеет массу M и центр тяжести ее расположен в точке C . Момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости пластинки (и проходящей через точку A), известен и равен I_A . При каких условиях, налагаемых на расстояния r_1 , r_2 и r_3 , справедливо следующее выражение для момента инерции пластинки относительно оси, также перпендикулярной плоскости пластинки, но проходящей через точку B :



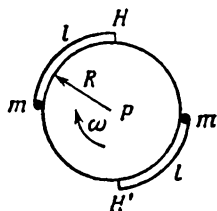
$$I_B = I_A + Mr_3^2?$$

19. 5. Круг радиусом R вращается вокруг своей касательной AA' . При этом образуется тело вращения, называемое тором. Найдите объем этого тора.



19. 6. Материальные точки массами M_1 и M_2 помещены на противоположных концах невесомого стержня длиной L . Стержень приводится во вращение вокруг оси, перпендикулярной ему. Через какую точку стержня должна проходить ось вращения, чтобы энергия, затрачиваемая на достижение заданной угловой скорости ω_0 , была минимальна?
19. 7. Для замедления вращательного движения искусственных спутников используется устройство, работающее по следующему принципу. Однородный круглый диск радиусом R и массой M может свободно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг шарнира P , установленного в центре диска. На краю диска укреплены два маленьких груза, масса каждого из них m . С диском их также соединяют две нити длиной l , намотанные по его периферии (см. рисунок). Когда диск вращается, грузики одновременно освобождаются без изменения полного момента количества движения системы. После этого грузики отлетают от диска, и в тот момент, когда нити натягиваются вдоль

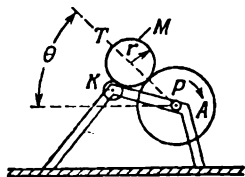
радиальных направлений, они соскакивают с крючков H и H' , позволяя грузикам улететь. Найдите длину нитей l , при которой угловая скорость диска в результате этой операции уменьшится в n раз.



19. 8. Джим находится в системе координат (x', y') и вращается относительно Джо, который неподвижен и находится в системе координат (x, y) . Найдите выражение для компонент силы, которая, по мнению Джима, действует на некоторую частицу, и покажите, что она складывается из компонент истинной силы $\mathbf{F}$, которую наблюдает и Джо, и двух псевдосил: радиальной центробежной силы и силы Кориолиса, которая перпендикулярна скорости.

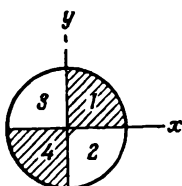
19. 9. Однородный шар радиусом R и массой M в начальный момент пущен по плоскости так, что он скользит по ней без качения. Между шаром и плоскостью существует трение, коэффициент которого равен μ . Какое расстояние пройдет шар, прежде чем его движение превратится в качение без скольжения, и какова будет к этому моменту его скорость?

19.10. На рисунке изображена упрощенная схема устройства для подачи типографской краски в печатном станке. Краска подается из барабана K , который свободно вращается на закрепленной оси. Момент инерции этого барабана пренебрежимо мал; P — ведомый печатный вал с неподвижной осью, а T — передающий валик, свободно катящийся по K и P . Валик T — это сплошной цилиндр радиусом r и массой M ; он все время катится по K и P без скольжения, и геометрия устройства такова, что линия, соединяющая оси T и P , образует с горизонталью угол θ . Какое максимальное угловое ускорение A можно сообщить валу P без потери контакта между T и K ?

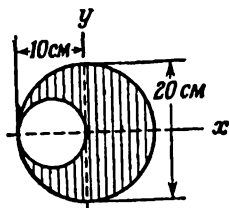


19.11. Сплошной цилиндр состоит из четырех секций — квадрантов, причем плотности материалов, из которых сделаны

разные секции, различаются и относятся, как числа, указанные на рисунке. Проведем оси x и y так, как показано на рисунке. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и через центр масс цилиндра.



- 19.12.** В диске постоянной плотности вырезано отверстие, как показано на рисунке. Найдите положение центра масс полученного тела.



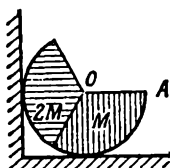
- 19.13.** Найдите положение центра масс однородной проволоки, изогнутой по дуге окружности радиусом R . Длина проволоки L ($R > L/2\pi$). Используйте систему координат с началом в центре окружности и с осью x , проходящей через середину проволоки.

- 19.14.** Используя результат предыдущей задачи или другой способ, найдите центр тяжести сектора с углом раствора α , вырезанного из однородного диска радиусом R .

- 19.15.** Цилиндр, радиус которого π см, а масса 3 кг, разрезан на три равные части. То же самое сделано с другим цилиндром радиусом π см, но массой уже 6 кг. Эти куски склеены друг с другом, как показано на рисунке, причем линия OA направлена горизонтально. Стенка абсолютно гладкая, а «пол» — абсолютно шероховатый.

а) С какой силой цилиндр давит на стенку?

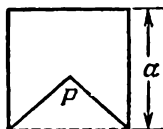
б) На каком расстоянии от центра на линии OA следует поместить материальную точку массой m , чтобы система оставалась в равновесии и после удаления стенки?



- 19.16.** Из квадратной металлической пластинки с длиной ребра a необходимо вырезать с одной стороны равнобедренный

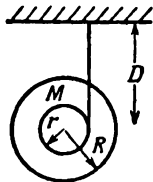
треугольник так, чтобы оставшаяся фигура, будучи подвешена за точку P (вершину треугольника), находилась в равновесии независимо от положения.

Чему равна высота треугольника?



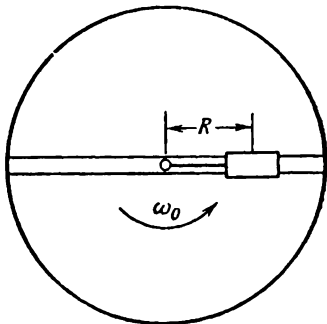
- 19.17. Катушка состоит из двух одинаковых дисков радиусом R и массой M , насаженных на невесомую ось радиусом r . Нить, намотанная на ось катушки, прикреплена к потолку. Расстояние от катушки до потолка равно D (см. рисунок). Из этого состояния катушка начинает двигаться вниз.

- Какой угол должна образовать нить с вертикалью в начальный момент, чтобы, опускаясь, катушка не раскачивалась?
- Каково вертикальное ускорение центра катушки?



- 19.18. Поворотный стол с моментом инерции I_0 свободно вращается вокруг вертикальной оси. На столе проложена прямолинейная радиальная дорожка, по которой может без трения двигаться тележка массой m (см. рисунок). Нить, привязанная к тележке, перекинута через маленький блок, а затем уходит под стол через полую ось. Первоначально система вращается с угловой скоростью ω_0 , и тележка находится на фиксированном расстоянии R от оси. Затем нить некоторой внешней силой вытягивается внутрь оси на такое расстояние, что тележка теперь отделена от оси меньшим промежутком r и остается в этом положении.

- Чему равна угловая скорость системы в конечном состоянии?
- Покажите подробно, что разность между значениями энергии системы в конечном и начальном состояниях равна работе, которую совершила сила, вытягивающая нить.
- Если нить отпустить, с какой радиальной скоростью v пройдет тележка через точку R ?



К главе 20. Вращение в пространстве

20. 1. Записав векторы в компонентной форме или как-нибудь по-другому, докажите следующие соотношения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

20. 2. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно некоторой фиксированной оси. Покажите, что скорость любой точки P этого тела равна $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный из произвольно выбранной точки, расположенной на оси вращения, к данной.
20. 3. Твердое тело вначале поворачивается на очень малый угол $\Delta\theta_1$ относительно одной оси, а затем на очень малый угол $\Delta\theta_2$ относительно другой оси, пересекающей первую в точке 0. Покажите, что общее смещение любой точки рассматриваемого тела такое же, как если бы оно было сразу повернуто на определенный малый угол относительно некоторой оси. Как найти эту ось и угол? Докажите, что твердое тело, подвергнутое одновременно действию нескольких угловых скоростей относительно различных осей, движется так, как если бы на него действовала только одна угловая скорость, равная векторной сумме всех слагающих скоростей. (Каждую угловую скорость следует рассматривать как вектор длиной ω , направленный вдоль оси вращения.)
20. 4. Система N частиц с массами m_i , координатами $\mathbf{r}_i$ и скоростями $\mathbf{v}_i$ обладает моментом количества движения, равным

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i).$$

Если же рассматривать систему координат, жестко связанную с центром масс, то можно считать, что система имеет момент количества движения $\mathbf{L}_{ц.м.}$. Пусть $\mathbf{R}_{ц.м.}$ и $\mathbf{v}_{ц.м.}$ — это положение и скорость центра масс, а

$M = \sum_{i=1}^N m_i$ — общая масса всех частиц. Покажите, что

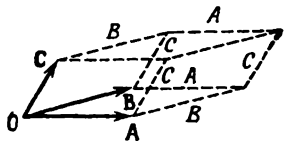
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{ц.м.} + M(\mathbf{R}_{ц.м.} \times \mathbf{v}_{ц.м.}).$$

Сравните результат с решением задачи 11.9.

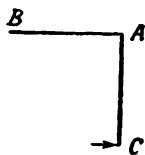
20. 5. а) Любые три вектора A , B , C можно рассматривать как определяющие твердое тело с шестью попарно параллельными плоскостями, т. е. параллелепипед. Покажите, что объем этого тела равен

$$V = |A \cdot (B \times C)|.$$

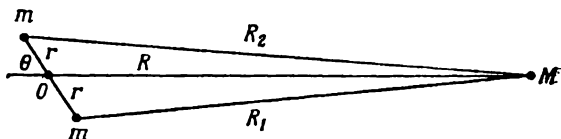
Параллелепипед, одна из вершин которого находится в начале координат, имеет три соседние вершины в точках $(10, -5, 3)$, $(3, -4, 7)$ и $(-5, -6, 3)$. Используется прямоугольная система координат (x, y, z) . Чему равен объем параллелепипеда?



20. 6. Два однородных одинаковых жестких стержня AB и AC скреплены в точке A ($AC \perp AB$) и перемещаются на гладком горизонтальном столе. В точке C перпендикулярно AC наносится горизонтальный удар. Найдите отношение скоростей центров масс стержней AB и AC немедленно после удара.



20. 7. Маховик, имеющий форму однородной тонкой круглой пластинки массой $10,0 \text{ кг}$ и радиуса $1,00 \text{ м}$, смонтирован на оси, проходящей через центр масс и составляющий угол 1° с перпендикуляром, восстановленным к плоскости маховика. Если последний вращается относительно этой оси с угловой скоростью $25,0 \text{ рад/сек}$, то чему равна пара сил, приложенная к его подшипникам?
20. 8. Два тела с одинаковыми массами m , скрепленные жестким стержнем (не имеющим массы) на расстоянии $2r$ друг от друга, притягиваются телом массы M , расположенным на расстоянии $R \gg r$ от центра стержня. Стержень составляет угол θ с направлением R . Найдите приближенную величину вращающего момента относительно его центра.



20. 9. Как Луна, так и Солнце в результате действия на Землю создают вращающий момент, поскольку Земля слегка сплюснута. Какое небесное тело образует больший момент и приблизительно во сколько раз? (См. предыдущую задачу.)

20.10. Экваториальный и полярный радиусы Земли равны 6378,388 и 6356,912 км соответственно. Плотность ρ на различных глубинах D , отсчитанных от поверхности Земли, приведена ниже (звездочкой помечены скачки плотности):

$D, \text{ км}$	0	30 *	100	200	400	1000	2000	2900 *	3500	5000 *	6000
$\rho, \text{ г/см}^3$	2,60	3,0	3,4	3,5	3,6	4,7	5,2	5,7	10,2	11,5	17,1
		3,3						9,4		16,8	

Используя эти значения, оцените:

- момент инерции Земли;
- ее вращательный момент количества движения;
- кинетическую энергию вращения.

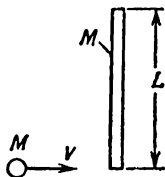
20.11. 1) Симметричное тело начинает катиться (без скольжения) вниз по наклонной плоскости с высоты h . Момент инерции тела относительно оси, проходящей через собственный центр масс, равен I , масса тела равна M , а радиус поверхности качения, находящейся в контакте с наклонной плоскостью, r . Определите линейную скорость центра масс в нижней точке наклонной плоскости.

- 2) Примените полученное вами общее выражение для определения скорости центра масс тела, если это тело
- сфера;
 - диск;
 - диск массой M_1 с внешним радиусом R_1 , насаженный на вал, имеющий массу m_2 и радиус r_2 .

20.12. Тонкий стержень массой M и длиной L лежит на горизонтальной абсолютно гладкой поверхности. Кусок замазки такой же массы, обладающей скоростью v , которая направлена перпендикулярно стержню, ударяется об один конец стержня и прилипает к нему, совершая тем самым неупругое столкновение очень малой продолжительности.

- Какова скорость центра масс системы до и после столкновения?
- Чему равен момент количества движения системы относительно ее центра масс непосредственно перед столкновением?

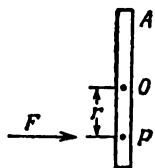
- в) Чему равна угловая скорость (относительно центра масс) сразу же после столкновения?
 г) На сколько уменьшается кинетическая энергия системы при столкновении?



20.13. Если весь лед на Земле растопить, то средний уровень мирового океана поднимется приблизительно на 61 м. Примите среднюю широту, где находятся льды, равной 80° ; нерегулярным распределением водных масс океанов на Земле пренебрегите и рассчитайте, на сколько секунд увеличится при этом длина дня? Предполагаем, что Земля — сфера радиусом 6370 км с моментом инерции $8,11 \cdot 10^{37} \text{ кг м}^2$.

20.14. Однородный стержень длиной L и массой M покоится на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. За очень малый промежуток времени он получает импульс $J = \int F dt$, приложенный в точке P ($OP = r$).

- а) Чему равна скорость центра масс O сразу же после сообщения импульса? Чему равна угловая скорость относительно точки O ? Какова мгновенная скорость точки A на другом конце стержня?
 б) Определите расстояние AP , для которого скорость точки A равнялась бы нулю сразу же после удара?



К главе 21. Гармонический осциллятор

21. 1. Твердое тело массой M свободно насажено на расположенную горизонтально ось, которая проходит на расстоянии d от центра масс C . Момент инерции относительно оси вращения равен I (трение отсутствует).

- а) Напишите дифференциальное уравнение, которое описывает изменение угла поворота тела θ со временем (угол θ отсчитывайте от равновесного положения тела).
 б) Если тело совершает малые колебания, так что $\sin \theta \approx \theta$, то чему равен период этих колебаний?

21. 2. В предыдущей задаче момент инерции твердого тела относительно его центра масс равен I_c . Найдите выражение для периода малых колебаний как функции d (и I_c) и покажите:

а) что имеются два значения d : d_1 и d_2 , которые соответствуют данному периоду;

б) что период равен $T = 2\pi \left(\frac{d_1 + d_2}{g} \right)$;

в) что период минимален, когда $d = \sqrt{I_c/M}$. Найдите это минимальное значение периода.

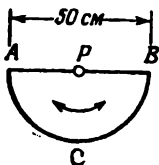
21. 3. Линейная пружина, находясь в свободном состоянии, имеет длину D , а когда на ее конце подвешен груз массой m , ее длина становится равной $D + A$. На груз, находящийся в покое, с высоты A падает другой груз такой же массы, прилипающий к первому. Найдите период и амплитуду колебаний такой системы и максимальную высоту (над первоначальным положением равновесия), достигаемые в результирующем движении.

21. 4. Две частицы A и B совершают гармоническое движение с одинаковой амплитудой (10 см) по одной и той же прямой. Частоты их движений составляют $\omega_A = 20 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_B = 21 \text{ сек}^{-1}$ соответственно. В момент времени $t = 0$ обе частицы проходят точку $x = 0$ в положительном направлении оси x (следовательно, они находятся «в фазе»).

а) На каком расстоянии они будут находиться друг от друга в момент времени $t = 0,350 \text{ сек}$?

б) Какова скорость частицы B относительно A в этот же момент времени?

21. 5. Каркас, сделанный из однородной проволоки, состоит из полуокружности ACB и ее диаметра AB . Этот каркас прикрепляется с помощью абсолютно гладкого штифта в точке P , проходящей через отверстие в средней точке его диаметра, и приводится в движение как маятник. Если диаметр каркаса AB равен 50 см, то каков период колебательного движения такого каркаса?



21. 6. На вертикальной пружине пренебрежимо малой массы подвешена пластина массой 20 г, на которой лежит грузик массой 5 г. Если оттянуть пружину, то система начнет колебаться с периодом $\pi/3 \text{ сек}$. Затем груз 5 г заме-

няется другим с массой 25 г. Каково будет смещение пластины при равновесии?

21. 7. Две частицы с массами $\frac{3}{4}M$ и M соединены пружиной пренебрежимо малой массы; длина пружины в свободном состоянии равна L , упругая постоянная K . Вначале массы покоятся на расстоянии L друг от друга на горизонтальном абсолютно гладком столе. Третья частица массой $\frac{1}{4}M$, движущаяся вдоль линии, соединяющей первые две частицы, сталкивается и прилипает к частице массой $\frac{3}{4}M$. Найти амплитуду и период колебаний системы.
21. 8. Гравитационная сила, действующая на частицу, которая помещена в однородный шар, прямо пропорциональна расстоянию от центра шара. Если принять за такой шар Землю и просверлить сквозь нее вдоль ее диаметра, соединяющего полюса, отверстие, то сколько времени понадобится телу, попавшему в это отверстие, чтобы достигнуть поверхности с противоположной стороны Земли? Соппротивлением воздуха пренебречь.
21. 9. В начальном состоянии колония бактерий растет со скоростью, пропорциональной числу наличных бактерий. Написать дифференциальное уравнение, выражающее это соотношение.
- 21.10. Точка подвеса математического маятника, период собственных колебаний которого равен 1 сек, совершает синусоидальные колебания с амплитудой 1,00 см и периодом 1,10 сек. Какова амплитуда установившихся колебаний маятника?

К главе 22. Алгебра

Наиболее общим видом числа, которое удовлетворяет правилам элементарной алгебры, является *комплексное число*. Оно может быть записано в виде суммы действительного (вещественного) и мнимого чисел

(Комплексное число) $u = (\text{Вещественное число}) x + (\text{Мнимое число}) iy$,

$i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей.

Любое алгебраическое уравнение должно оставаться справедливым при изменении знака перед i . Такая операция носит название *комплексного сопряжения*. Если $u = x + iy$, то комплексно сопряженное число u^* равно $x - iy$.

Правила алгебры, примененные к комплексным числам, дают

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Величина $|u| = \sqrt{uu^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* числа u .

Вещественное число, возведенное в мнимую степень, становится комплексным числом с модулем, равным единице. Если величина мнимой степени изменяется, то вещественная и мнимая части комплексного числа осциллируют по закону синуса и косинуса. В частности,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (A)$$

• • •

22. 1. В равенстве $u + iv = (a + ib)(c + id)$ положим

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{d}{c} = \operatorname{tg} \beta.$$

Используя формулу (22.4) «Лекций» (вып. 2, стр. 381) и формулы тригонометрии, покажите, что

$$a) \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2},$$

$$б) \frac{v}{u} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

22. 2. Решите предыдущую задачу, используя приведенную выше формулу (A).

22. 3. Покажите, что

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

22. 4. Покажите, что

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd + i(bc - cd)}{c^2 + d^2}.$$

22. 5. Функции $\operatorname{ch} \theta$ и $\operatorname{sh} \theta$, определяемые равенствами

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad \operatorname{sh} \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2},$$

называются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом угла θ .

Покажите, что

$$\begin{aligned} \cos i\theta &= \operatorname{ch} \theta, \\ \sin i\theta &= i \operatorname{sh} \theta, \\ \operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta &= 1. \end{aligned}$$

6. Используя основную формулу дифференцирования

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

докажите, что

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}.$$

22. 7. а) Последовательным дифференцированием или каким-либо иным способом покажите, что функция e^x может быть представлена в виде следующего бесконечного ряда:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

б) Покажите, что функции $\cos x$ и $\sin x$ могут быть представлены следующими бесконечными рядами:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(Эти ряды часто применяются при вычислении функций e^x , $\cos x$, $\sin x$ для значений $x \ll 1$, хотя они сходятся при любых x .)

22. 8. Найдите полное алгебраическое решение уравнения

$$y = \sqrt[n]{1},$$

где n — целое число.

22. 9. Используя свойства функции $e^{i\theta}$ и биномиальную теорему, покажите, что

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots$$

22.10. а) Воспользовавшись соотношением $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$, выведите тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы двух углов.

б) Дайте геометрическую интерпретацию результата умножения одного комплексного числа $Ae^{i\theta}$ на другое комплексное число $Be^{i\varphi}$.

- 22.11. Найдите $\log_{11} 2$ и $\log_{11} 7$, используя следующую таблицу последовательных значений корней r -й степени из числа 11:

Показатель корня	$\sqrt[r]{11}$	$\log_{11} \sqrt[r]{11}$
1	11,000	1,00000
2	3,3166	1,50000
4	1,8212	0,25000
8	1,3495	0,12500
16	1,1617	0,06667
32	1,0778	0,03333
64	1,0382	0,01667
128	1,0189	0,00833

Проверьте свой результат с помощью тождества

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N,$$

где a и b — любые два значения основания логарифмов.

К главе 23. Резонанс

23. 1. Составьте и решите дифференциальное уравнение, описывающее поведение тока, когда он протекает:
- в катушке индуктивностью L ,
 - в конденсаторе емкостью C ,
- если к ним приложено синусоидальное напряжение частотой ω .
- Найдите комплексный импеданс указанных выше цепей.
23. 2. Найдите зависимость импеданса (полного сопротивления) Z от частоты ω для цепи, состоящей из индуктивности L и емкости C , если они соединены:
- последовательно,
 - параллельно.
- Качественно обсудите полученные результаты.
23. 3. а) Покажите, что дифференциальное уравнение движения тела массой m , прикрепленного к пружине с упругой постоянной k и испытывающего силу трения $-m\gamma\dot{x}$, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

- б) Найдите решение этого уравнения (используйте комплексную форму записи!), предполагая, что оно имеет вид $x = e^{\alpha t}$, а затем покажите, что общее решение дается выражением

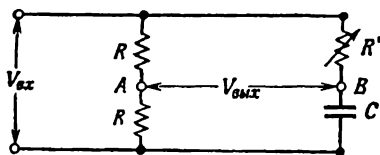
$$x = e^{-\frac{\gamma}{2} t} \left[A \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) \right],$$

если $\gamma < 2\omega_0$.

- в) Как изменится вид найденного решения, если $\gamma > 2\omega_0$?

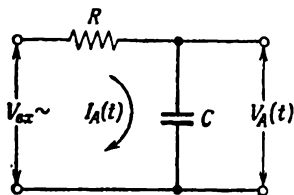
23. 4. В момент времени $t = 0$ положение и скорость тела массой m (см. предыдущую задачу) равны $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$. Найдите A и B .

23. 5. Часто требуется, чтобы в электрической цепи имелось синусоидальное напряжение постоянной амплитуды, фазу которого можно менять. Электрическая схема, с помощью которой можно осуществить это требование, называется фазовращателем. Один из примеров такой цепи показан на рисунке. Докажите, что амплитуда напряжения между точками A и B составляет половину амплитуды входного напряжения, а фаза может меняться в пределах от 0 до 180° при изменении сопротивления R' .

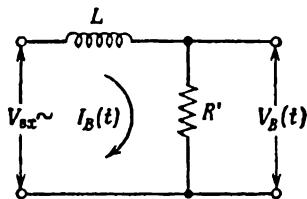


23. 6. На входе цепей A и B (см. рисунок) имеется источник с напряжением $V_{вх} = V_0 \cos \omega t$. Положим, что ток, протекающий через клеммы на выходе цепей, пренебрежимо мал.

- а) Найдите соотношение, которое должно существовать между R , C , R' и L , чтобы выходные напряжения обеих цепей $V_A(t)$ и $V_B(t)$ были равны.
б) Найдите токи $I_A(t)$ и $I_B(t)$.



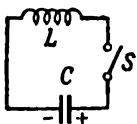
A



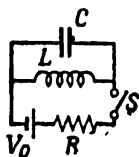
B

К главе 24. Переходные решения

24. 1. Тело на воздушной подушке при движении теряет свою скорость главным образом из-за вязкости в тонком воздушном слое под ним, причем сила торможения пропорциональна скорости. Составьте и решите дифференциальное уравнение движения тела на плоскости. Как его скорость изменяется:
 а) со временем?
 б) с расстоянием?
24. 2. Пластины конденсатора емкостью C , первоначально заряженного до напряжения V_0 , в момент времени $t = 0$ соединяются через сопротивление R . Составьте дифференциальное уравнение для V как функции t . Решите это уравнение, предполагая, что существует экспоненциальное решение.
24. 3. Тело на воздушной подушке имеет магнит. Этот магнит при движении тела генерирует круговые токи, магнитные поля которых действуют на магнит, в результате чего появляется замедляющая сила, пропорциональная скорости. Найдите (в зависимости от коэффициента торможения γ):
 а) конечную скорость, достигаемую телом;
 б) скорость тела в зависимости от времени;
 в) положение тела в зависимости от времени, если оно начинает двигаться из состояния покоя.
24. 4. Конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены так, как показано на рисунке. Конденсатор первоначально заряжен до напряжения V_0 , а ключ S разомкнут. В момент времени $t = 0$ он замыкается.
 а) Найдите напряжение на конденсаторе в зависимости от времени.
 б) Рассчитайте зависимость от времени величин $CV^2/2$ и $LI^2/2$. Каков, по-вашему, физический смысл этих величин?



24. 5. В электрической цепи, показанной на рисунке, ключ S вначале замкнут. По цепи протекает постоянный ток $I = V_0/R$. В момент времени $t = 0$ ключ мгновенно размыкает цепь. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе.



24. 6. Тело массой 5,0 кг колеблется с малым затуханием, которым можно пренебречь. Подвешенное на пружине тело совершает 10 полных колебаний за 10,0 сек, затем приводится в действие маленький магнитный замедлитель движения и появляется затухание, пропорциональное скорости движения. В результате амплитуда колебаний уменьшается за 10 полных циклов от 0,2 до 0,1 м.
- а) Составьте уравнение движения тела, причем коэффициенты перед членами d^2x/dt^2 , dx/dt и x выразите в численном виде, воспользовавшись системой единиц MKS.
 - б) Чему равен новый период колебаний тела?
 - в) За сколько колебаний (начиная с цикла с амплитудой 0,2 м) амплитуда уменьшается до 0,05 м? До 0,02 м?
 - г) Чему равна максимальная скорость диссипации энергии в течение первого колебания?

24. 7. Гармонический осциллятор с затуханием представляет собой шарик массой m , подвешенный на пружине с упругой постоянной k ; он находится в вязкой среде, в результате взаимодействия с которой появляется сила трения, равная $-m\gamma(dx/dt)$.

1) Для случая движения с трением найдите решения $x = x(t)$ для $t \geq 0$, если на шарик действует сила:

$$а) F = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F_0 = \text{const} & \text{при } t \geq 0; \end{cases}$$

б) сила отсутствует, но в момент времени $t = 0$ шарiku сообщается импульс $p = p_x$;

$$в) F = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F_0 \cos \omega_0 t & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

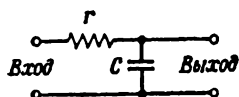
2) Если на осциллятор действует сила $F = F_0 \cos \omega t$ и рассматриваются достаточно большие отрезки времени, то чему равна частота ω^* , при которой амплитуда колебаний достигает максимального значения?

Примечание. Помните, что полное решение содержит два члена, описывающие как стационарное, так и переходное движение, и что начальные условия полностью определяют постоянные интегрирования.

К главе 25. Линейные системы

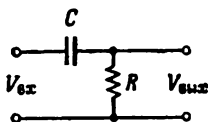
25. 1. Чтобы уменьшить колебания напряжения, снимаемого с выпрямительного устройства, используется так называемый «сглаживающий» фильтр. В простейшем случае он состоит из резистора ($r = 10^3 \text{ ом}$), соединенного с конден-

сатором ($C = 10$ мкф) так, как показано на рисунке. Найдите напряжение на выходе конденсатора, если входное напряжение имеет постоянную компоненту V_0 и переменную компоненту с циклической частотой 120 сек^{-1} и амплитудой V_2 .



25. 2. Во многих случаях желательно иметь электрическую цепь, которая «дифференцирует» функцию, описывающую подаваемое на ее вход напряжение, по времени. Простая цепь, удовлетворяющая этому требованию, изображена на рисунке. Покажите, что выходное напряжение в такой цепи (если пренебречь током, протекающим на выходе), равно

$$V_{\text{вых}}(t) = RC \frac{dV_{\text{вх}}}{dt}$$



при условии, что

$$|V_{\text{вых}}| \ll |V_{\text{вх}}|.$$

25. 3. Найдите $V_{\text{вых}}$ в цепи, изображенной на рисунке к предыдущей задаче, для случая, когда $V_{\text{вх}} = V_0 \cos \omega t$, и проверьте еще раз правильность результата, полученного выше.
25. 4. Придумайте простую цепь, которая «интегрировала» бы входное напряжение и обсудите ее свойства.
25. 5. Тело массой m , прикрепленное двумя одинаковыми горизонтальными пружинами с упругими постоянными $k/2$, скользит по поверхности стола. Предполагается, что коэффициент трения постоянен. Тело смещают в сторону на расстояние A вправо от центральной точки и затем отпускают.
- а) Составьте дифференциальное уравнение движения тела и решите его для временного интервала

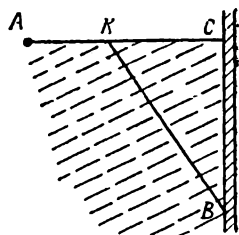
$$0 < t < \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- б) Каково должно быть расстояние A , чтобы размах колебания тела оставался больше расстояния B от центра после пересечения точки $x = 0$ целое число $(0, 1, 2 \dots)$ раз?



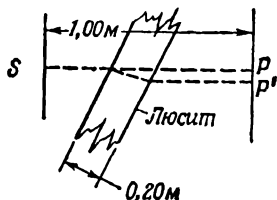
К главе 26. Оптика. Принцип наименьшего времени

26. 1. Пешеход, идя по тротуару, проходит $1,5 \text{ м}$ в 1 сек , а по вспаханному полю — только $0,9 \text{ м}$ за 1 сек . Он вышел из точки A , находящейся на расстоянии 42 м от стены, и направляется в точку B , расположенную к югу вдоль стены на расстоянии 36 м от края поля. По какому пути AKB должен идти пешеход, чтобы пройти его за кратчайшее время? (Уместно предположить, что к этой задаче приложим «закон преломления». Однако если вы достаточно смелы, то попытайтесь решить ее без такого предположения, а потом проверьте, оправдывается ли оно.)

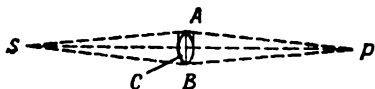


26. 2. Свет от источника S , расположенного на расстоянии 1 м от экрана, посылается узким пучком перпендикулярно экрану и попадает на него в точке P . На пути луча помещается пластина из люсита толщиной $0,2 \text{ м}$ (показатель преломления люсита $1,5$) так, чтобы направление распространения пучка в этой пластине составляло 30° с первоначальным направлением (когда не было пластины).

- Найдите боковое смещение луча PP' .
- Найдите в процентах увеличение времени прохождения лучом пути SP' по сравнению с временем, необходимым для прохождения первоначального пути SP в воздухе.



26. 3. Пусть S — источник света, а P — его изображение, даваемое линзой ACB , $SC = CP = 1$ м, $AC = BC = 0,1$ м. Линза ACB имеет на краях толщину 3 мм. Если луч проходит путь SCP за то же время, что и расстояния SAP и SBP , то какова толщина линзы в середине (в точке C)? (Показатель преломления стекла 1,60.)

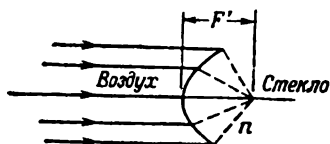


26. 4. В обычном плоском зеркале наше изображение оказывается перевернутым справа налево, т.е. изображение правой руки выглядит, как левая рука. Почему зеркало не переворачивает еще все и вверх ногами? Что действительно переворачивается зеркалом?
26. 5. Два плоских зеркала расположены так, что образуют прямой двугранный угол, причем линия пересечения вертикальна. Объяснить, почему в таком зеркале мы «видим себя такими, какими нас видят другие люди».
26. 6. Три взаимно перпендикулярных зеркала расположены так, что образуют прямой трехгранный угол. Луч света падает на одно из зеркал, а затем, отражаясь от него, попадает на другое зеркало, а может быть, и на третье. Покажите, что после всех отражений (мы предполагаем, что зеркала безграничны) луч выйдет в направлении, строго противоположном первоначальному, но окажется несколько смещенным. Знаете ли вы практическое применение такого «углового отражателя»?
26. 7. Хорошо известно, что когда свет переходит из одной прозрачной среды в другую, то не все лучи испытывают преломление, некоторая их часть отражается, а весьма малая доля (если таковая вообще есть) поглощается или рассеивается. Что происходит, когда пучок света падает на поверхность раздела двух сред под большим углом к нормали, проходя вначале через более плотную в оптическом отношении (имеющую больший показатель преломления) среду?

К главе 27. Геометрическая оптика

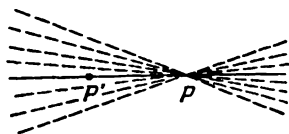
27. 1. Параллельный пучок света, распространяющийся в воздухе, собирается в фокусе преломляющей поверхности, которая ограничивает область с показателем преломления n .

Найдите форму этой поверхности.



27. 2. Внешний диаметр стеклянной капиллярной трубки равен D , показатель ее преломления n . Если смотреть на трубку со стороны, то кажется, что маленькое капиллярное отверстие имеет диаметр d . Чему в действительности равен диаметр d' трубки?

27. 3. Пучок света сходится в определенной точке P . Нужно в данной точке Q , расположенной на оси, поместить такую отражающую поверхность, которая даст изображение в новом фокусе — в точке P' . Определите форму требуемой поверхности.



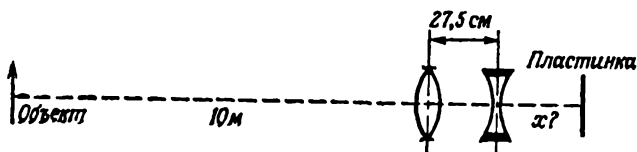
27. 4. Линза с фокусным расстоянием F дает действительное изображение отдаленного объекта, которое рассматривается через увеличительное стекло с фокусным расстоянием f . Чему равно увеличение системы, если линзы расположены так, что передний фокус окуляра совпадает с задним фокусом объектива?

27. 5. Нормальный человеческий глаз может сфокусироваться на объекте, находящемся на расстоянии 25 см и дальше. Прямо против глаза расположена простая тонкая увеличивающая линза с фокусным расстоянием $f = +5$ см.

- Между какими двумя предельными положениями должен быть расположен рассматриваемый объект, чтобы его было ясно видно?
- Определите увеличение системы для каждого из этих двух положений.

27. 6. Телеобъектив состоит из положительной линзы с фокусным расстоянием $f_1 = 30$ см и отрицательной линзы с фокусным расстоянием $f_2 = -10$ см; расстояние между обеими линзами 27,5 см. Где должна быть расположена фотопластинка, на которой будет сфотографирован объект,

находящийся впереди первой линзы на расстоянии 10 м? Тщательно проследите путь луча.



27. 7. 200-дюймовый телескоп Гейла имеет фокусное расстояние 160 м. Какова разннца в положении изображений при наблюдении отдаленных звезд и
- Луны;
 - искусственного спутника, находящегося от Земли на расстоянии 320 км?
27. 8. Две тонкие линзы L и L' с фокусными расстояниями f и f' находятся на расстоянии D друг от друга. Найдите эквивалентное фокусное расстояние F всего устройства и расстояния Δ и Δ' от главных плоскостей до линз L и L' .

К главе 28. Электромагнитное излучение

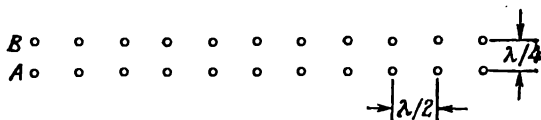
28. 1. Дайте геометрическую интерпретацию и найдите модули следующих комплексных величин:
- $re^{i\varphi/2} + re^{-i\varphi/2}$,
 - $\sum_{n=0}^{N-1} re^{in\varphi}$.

К главе 29. Интерференция

29. 1. Две антенны расположены так, как показано на фиг. 29.5 «Лекций» (вып. 3, стр. 54). Они работают в одной фазе так, что, когда одна из них излучает с интенсивностью I_0 по всем горизонтальным направлениям, интенсивность излучения другой составляет $2I_0$. Чему равна наблюдаемая интенсивность излучения обеих антенн в различных направлениях, указанных на рисунке?
29. 2. Четыре идентичных дипольных излучателя расположены параллельно друг другу и находятся на одинаковых расстояниях 2,50 см друг от друга. Они работают на частоте $3,00 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$ и сфазированы так, что фаза излучения каждого последующего диполя отстает от предыдущего на 90° . Найдите интенсивность излучения на больших расстояниях от системы в экваториальной плоскости (пер-

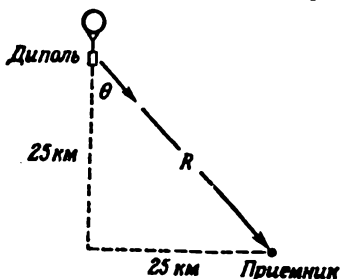
пендикулярной оси диполя) и постройте эту функцию в полярных координатах. Полученная диаграмма носит название диаграммы направленности антенной системы.

29. 3. Две параболоидные «чаши» радиотелескопа КАЛТЕХа в Оуенс Вэлли расположены на расстоянии 480 м друг от друга. Каждая «чаша» концентрирует поступающее излучение в малом приемнике, находящемся в ее фокусе. Два принимаемых сигнала подаются в расположенный посередине между «чашами» смеситель, где оба сигнала складываются, а затем вычисляется средний квадрат результирующей амплитуды. С какой точностью можно установить угловое положение удаленного точечного источника, наблюдаемого с помощью радиотелескопа, если 10%-ные флуктуации выходного сигнала уже считаются заметными? Длину волны возьмите равной 50 см.
29. 4. Заряд q движется по окружности радиусом a с угловой частотой ω . Вычислите электрическое поле, создаваемое зарядом, на большом расстоянии R от системы под углом θ к оси круговой орбиты. Найдите интенсивность излучения в плоскости орбиты и на оси орбиты при больших значениях R .
29. 5. Все N диполей в линии A работают в одинаковой фазе, а все диполи в линии B отстают по фазе на 90° от диполей в линии A . Определите картину излучения в экваториальной плоскости (как в задаче 29.2) на большом рас-



- стоянии от линий.
29. 6. Электроны в длинной прямой тонкой проволоке длиной L колеблются с круговой частотой ω и малой амплитудой a в одинаковой фазе вдоль всей проволоки. Найдите электрическое поле, создаваемое ими под углом θ относительно направления проволоки на больших расстояниях R от нее ($R \gg L$).
29. 7. Количество энергии на единицу площади, переносимой электромагнитной волной, пропорционально среднему квадрату напряженности электрического поля. Найдите долю полной энергии, излучаемой колеблющимся зарядом, которая падает на единицу площади, нормальной к радиус-вектору R , проведенному под углом θ к оси коле-

баний. Рассчитайте и выразите в $\text{вт}/\text{м}^2$ эту величину для случая вертикально ориентированного колеблющегося диполя, подвешенного к радиозонду космических лучей, который находится на высоте

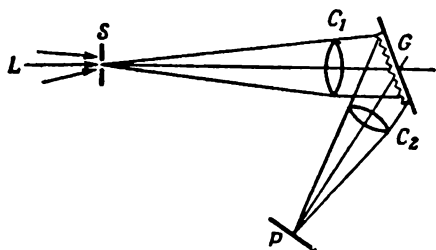


25 км и на расстоянии 25 км от приемника по горизонтали, если всего им излучается 0,5 вт.

К главе 30. Дифракция

34. 1. Длины волн D -линий в спектре возбуждения натрия равны 5889,95 и 5895,92 Å соответственно. Какую длину должна иметь решетка, содержащая 600 линий на 1 мм, чтобы разрешить эти линии в спектре первого порядка?
30. 2. По прямой дороге идет обычная автомашина с включенными фарами (рассматриваемыми как точечные источники). Расстояние между фарами автомобиля 120 см. На каком расстоянии от наблюдателя должна находиться машина, чтобы он был уверен, что видит два источника света, а не один? Примите диаметр зрачка глаза равным 0,5 см, а эффективную длину волны света, испускаемого фарами, равной 5500 Å. Как вы думаете, тот факт, что свет «белый» (т. е. представляет собой смесь лучей с разными длинами волн), облегчает или затрудняет разрешение двух источников света?
30. 3. На рисунке показан общий вид спектрографической решетки. Свет от источника L проходит через узкую щель S , затем через коллиматорную линзу (или зеркало) C_1 , которая превращает его в параллельный пучок лучей (так что на решетку падает как бы плоская волна, приходящая из бесконечности). Далее параллельный пучок лучей дифрагирует от решетки G ; дифрагированный свет, идущий в определенном угловом интервале, падает на линзу C_2 , называемую камерной, и фокусируется ею в плоскости P . Получается набор узких спектральных линий. Пусть длина щели равна h , ее ширина w , фокусные расстояния линз C_1 и C_2 равны F_1 и F_2 , а углы между нормалью к решетке и осями линз C_1 и C_2 равны θ_1 и θ_2 ; 1 мм решетки содержит N линий. Дайте ответ на следующие вопросы:

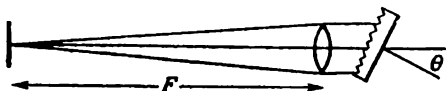
- а) Какую ширину будет иметь полоса, занимаемая спектром в плоскости P ?
- б) Какой длине волны (s) будет отвечать линия, лежащая на плоскости P в месте прохождения оси линзы C_2 ?
- в) На каком расстоянии друг от друга в фокальной плоскости будут находиться две спектральные линии, длины волн которых отличаются на $1,00 \text{ \AA}$? Такая величина часто называется *дисперсией* оптического устройства.
- г) Какова ширина спектральной линии в плоскости P , если ширина щели w много больше разрешения коллиматорной линзы [равного $1,22\lambda(F_1/A_1)$, где A_1 — апертура] и уширения, создаваемого решеткой и равного $(\lambda/L)F_1$, где L — размер решетки?



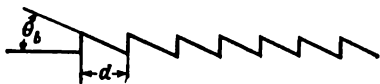
30. 4. Спектрограф 150-футового солнечного башенного телескопа, находящегося в обсерватории Маунт Вильсон, показан схематически на рисунке. В этом устройстве одна и та же линза действует и как коллиматорная, и как камерная, а $\theta_i = -\theta_d$ (почти!). Фокусное расстояние всего устройства $F = 23 \text{ м}$, а решетка имеет площадь $15 \text{ см} \times 25 \text{ см}$, причем в 1 мм ее содержится 600 линий. Обычно при наблюдениях используется спектр пятого порядка.

- а) При каком угле θ наклона решетки линия спектра возбуждения нейтрального атома железа, отвечающая длине волны $\lambda = 5250,218 \text{ \AA}$, будет совпадать с положением щели в спектре пятого порядка?
- б) Для каких других длин волн в интервале от $\lambda = 3600 \text{ \AA}$ до $\lambda = 7000 \text{ \AA}$ линия спектра также будет совпадать с положением щели?
- в) Предложите простой способ устранения в наблюдаемой картине спектров нежелательных порядков, оставив только спектр пятого порядка.
- г) Какова дисперсия рассматриваемого устройства при длине волны $\lambda = 5250 \text{ \AA}$, отвечающей линии в спектре пятого порядка?

- д) Каково минимальное теоретическое значение $\Delta\lambda$, которое может быть разрешено при длине волны $\lambda=5250 \text{ \AA}$ в спектре пятого порядка?



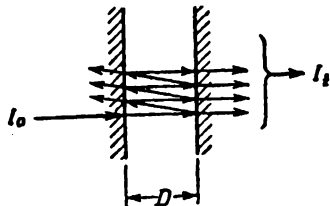
30. 5. Длины волн спектральных линий обычно измеряются с точностью около $0,001 \text{ \AA}$ при помощи спектрографов, разрешающая сила которых составляет только $0,010 \text{ \AA}$. Не нарушаются ли при этом какие-нибудь основные законы физики? Объясните.
30. 6. Когда желобки дифракционной решетки располагаются так, что отражают большую часть падающего излучения только в определенном направлении, то говорят, что решетка *блестит* в этом направлении. Предположим, что желобки можно нанести так, чтобы сечение решетки представляло собой пилообразную функцию, показанную на рисунке, причем поверхность каждого желобка лежит под определенным углом θ_b к горизонтали.
- Используя понятие о дифрагированном пучке света как об излучении, испускаемом в веществе осцилляторами, которые колеблются в одной фазе с падающим излучением, определите, в каком направлении дифрагированный пучок будет иметь наибольшую интенсивность, если $\theta_i = 0$?
 - Приблизительно оцените тот угловой интервал, внутри которого решетка «блестит».



30. 7. Интерферометр Фабри — Перо состоит из пары прецизионно отшлифованных плоских поверхностей, параллельных друг другу и расположенных на расстоянии D . Эти поверхности отражают часть R^2 света, нормально падающего на них, и пропускают долю T^2 . Свет с интенсивностью I_0 и длиной волны λ вначале падает слева (см. рисунок), причем часть лучей сразу проходит через систему, а некоторая их доля отражается от правой поверхности, потом от левой, а затем проходит сквозь систему. В общем проходящий пучок состоит из лучей, которые отразились $0, 2, 4, 6 \dots$ раз и в конце концов прошли

через обе поверхности. Как интенсивность проходящего света зависит от величин D , λ , R и T ?

Примечание. Узкополосные оптические фильтры, называемые интерференционными, действуют по такому же принципу. Обе отражающие поверхности у них сделаны из нескольких слоев высококачественного стекла точно фиксированной толщины и с различными показателями преломления.



К главе 31. Как возникает показатель преломления

31. 1. Найдите показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны $1,56 \cdot 10^{-8}$ см, предполагая, что электроны в алюминии имеют собственную частоту, много меньшую, чем частота рентгеновских лучей.
31. 2. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой 100 мксек^{-1} равен $n = 0,90$. Определите плотность электронов в 1 см^3 ионосферы.
31. 3. Электрическое поле E световых волн, проходящих через среду с показателем преломления n , равно $E_0 e^{i\omega(t-nz/c)}$.
а) Покажите, что если $n = n' - in''$, то

$$E = E_0 e^{-n''\omega z/c} e^{i\omega(t-n'z/c)}.$$

- б) Используя выражение $n - 1 = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$, найдите, по какому закону ослабляется интенсивность световой волны, частота которой в точности равна собственной частоте ω_0 атома.

31. 4. Известно, что мгновенная плотность потока энергии электромагнитной волны равна $S = \epsilon_0 c E^2 \text{ вт/м}^2$.
а) Найдите полную энергию, излучаемую в единицу времени электроном, осциллирующим с амплитудой x_0 и угловой частотой ω .
б) Сравните энергию, излучаемую за одно колебание, с запасенной энергией $\frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$ и найдите константу затухания γ_R . Это затухание называется *радиационным затуханием*.

- в) Возбужденный атом испускает фотоны с определенной длиной волны λ . Рассчитайте ожидаемое уширение $\Delta\lambda$ спектральной линии, если оно возникает исключительно из-за радиационного затухания. (Рассматривайте атом как крошечный осциллятор, обладающий затуханием.)

**К главе 32. Радиационное затухание.
Рассеяние света**

32. 1. Покажите, что если уравнение движения заряженного осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^2 m} \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{F(t)}{m},$$

то член, содержащий третью производную и отвечающий так называемой радиационной силе трения, правильно описывает скорость уменьшения энергии при излучении (сопротивление излучения) для любой частоты.

Примечание. Пусть $F(t) = A \cos \omega t$. Найдите работу, совершаемую радиационной силой трения.

32. 2. Пучок света проходит через область, содержащую N рассеивающих центров в единице объема. Сечение рассеяния света на каждом из них равно σ . Покажите, что интенсивность света в зависимости от пройденного расстояния x описывается формулой $I = I_0 e^{-N\sigma x}$.

32. 3. Используя выражение для сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

и выведенную в «Лекциях» формулу для показателя преломления газа, покажите, что величина $N\sigma$ может быть записана в виде

$$N\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{(n-1)^2}{N} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4.$$

(Таким способом было вычислено впервые число Авогадро при изучении рассеяния света.)

32. 4. Сколько голубого света ($\lambda = 4500 \text{ \AA}$), испускаемого Солнцем, проходит через атмосферу, когда Солнце находится
а) в зените?
б) под углом 10° к горизонту?

32. 5. Когда были открыты новые лучи (названные X-лучами, ибо они обладали неизвестными, но удивительными свойствами), было высказано предположение, что они, как и свет, являются поперечными волнами. Затем было замечено, что эти лучи рассеиваются электронами вещества. Как можно доказать, что они действительно представляют собой поперечные волны? Можно ли их поляризовать?
32. 6. Внутренняя корона Солнца (называемая K-короной) представляет собой, собственно, солнечный свет, рассеянный свободными электронами. Кажущаяся яркость этой K-короны на расстоянии одного солнечного радиуса от солнечного диска составляет около 10^{-8} от яркости самого диска (на единицу площади). Вычислите число свободных электронов в 1 см^3 пространства вблизи Солнца.
32. 7. Покажите, что величина $(\epsilon_0 c)^{-1}$ имеет размерность сопротивления и оцените ее численно.
32. 8. Межзвездное пространство заполнено облаками из крошечных пылинок, состоящих из углерода, льда и очень малого количества других элементов. Какова должна быть минимальная масса таких пылинок, отнесенная к единице площади (1 г/см^2), способная ухудшить наши наблюдения за звездами, скажем, в 100 раз (т. е. на 5,0 звездной величины). Не забудьте, что свет от звезд может не только рассеиваться на пылинках, но и просто поглощаться ими.
32. 9. Короткий прямой кусок проволоки, помещенный в поток электромагнитных волн, излучаемых РЛС, рассеивает их. Электрическое поле падающей волны взаимодействует с движущимися электронами в проволоке, вследствие чего и происходит рассеяние. Если рассматривать достаточно короткий кусок проволоки (длина которого много меньше λ), то можно предположить, что среднее смещение электронов в нем вдоль оси пропорционально компоненте $E_{\parallel}$ электрического поля волны, параллельной проволоке. Таким образом, если в проволоке имеется N электронов, а d — их среднее смещение, то $d = \chi E_{\parallel}$. Нам нужно знать (в зависимости от χ и N):
- а) чему равно сечение рассеяния проволоки?
 - б) как зависит сечение рассеяния от ориентации проволоки?

К главе 33. Поляризация

33. 1. Две поляроидные пластинки расположены так, что их оси поляризации образуют прямой угол, а третья размещается между ними так, чтобы ее ось составляла угол θ с осью первого поляроида. Какова интенсивность света, проходящего через такое устройство, если все поляроиды идеальны (потерь нет)?
33. 2. Предположим, что когда пучок плоско поляризованного света падает на поляроидную пластинку, то часть его $\alpha^2 I_0$ (I_0 — интенсивность падающего света) проходит через пластинку, если ось поляроида параллельна направлению поляризации. Если же эти направления образуют прямой угол, то через пластинку проходит только доля падающего света $\epsilon^2 I_0$, где $\epsilon \ll 1$. (Если поляроид идеальный, то α^2 должно быть равно единице, а ϵ^2 — нулю.) Неполаризованный свет интенсивностью I_0 проходит через пару поляроидных пластинок, оси которых образуют угол θ . Какова интенсивность прошедшего света? (Пренебречь эффектами отражения.)
33. 3. Покажите, что для угла Брюстера (угол падения i , при котором отраженный луч полностью поляризован) справедливо соотношение $\operatorname{tg} i = n$.
33. 4. Оцените интенсивность и поляризацию излучения электрона, движущегося с постоянной скоростью по круговой орбите, для точек, расположенных:
- а) на оси, проходящей через центр круга,
 - б) в плоскости окружности.
33. 5. Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны 600 мкм равны $n_o = 1,544$ и $n_e = 1,553$ для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если они нормально падают на поверхность кристалла. Какова должна быть толщина кристалла, чтобы произошел сдвиг фаз этих лучей на 90° , если используется свет указанной длины волны?
33. 6. Первокурсник КАЛТЕХа, прогуливаясь с девушкой, видит Луну под углом 10° над горизонтом и ее отражение в спокойном озере. С тоской вспоминая гл. 33 «Лекций», он делает попытку рассчитать яркость изображения по сравнению с яркостью самой Луны, полагая, что излучение от

Луны не поляризовано (почти), и забывая, что обиженная спутница уйдет. Какой результат он получит? Покажите, что интенсивность отраженных касательных лучей достигает 100%.

33. 7. Свет падает перпендикулярно плоскости одной из граней алмаза ($n = 2,40$).
- Какая доля падающего излучения отражается?
 - Чему равен угол Брюстера для алмаза?
33. 8. В дополнение к задаче 33.5 предположим, что показатели преломления кварца для света с длиной волны $\lambda_1 = 410$ мкм равны $n_o = 1,557$ и $n_e = 1,567$ и что кристалл кварца есть четвертьволновая пластинка для света с длиной волны $\lambda_2 = 600$ мкм. Полностью опишите состояние поляризации света с длиной волны λ_1 , прошедшего через кристалл, если падающие лучи были линейно поляризованы.
33. 9. Вам дана отполированная пластинка, например из черного обсидиана. Нужно измерить показатель преломления этого материала. Как вы поступите?

К главе 34. Релятивистские явления в излучении

34. 1. Диск радиусом A катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Напишите уравнение пути, проходимого точкой, находящейся на расстоянии $R \leq A$ от центра диска, в зависимости от A , R и угла поворота диска θ . Ось x направлена вертикально от центра диска, а ось z — в направлении его движения. Найдите ускорение d^2x/dt^2 точки при $z = ct$.
34. 2. Полученное в предыдущей задаче выражение необходимо для вычисления интенсивности излучения частицы, движущейся по круговой траектории радиусом R . Выразите результат через наблюдаемые величины R , v (скорость частицы) и x (положение частицы в момент наблюдения).
34. 3. Найдите отношение интенсивностей излучения заряженной частицы, когда она движется по направлению к наблюдателю и от него по круговой орбите.
34. 4. Получите для угла абберации формулу $\sin \theta = v/c$, используя преобразования Лоренца.
34. 5. Покажите, что скорость электрона с энергией 1 ГэВ отличается от скорости света на одну восьмимиллионную часть.

34. 6. При наблюдении D -линии излучения атомов натрия (лабораторная длина волны 589,0 мкм) установлено, что она сдвинута в спектре излучения звезды и имеет длину волны 588,0 мкм. Чему равна скорость звезды относительно наблюдателя?
34. 7. Астроном из КАЛТЕХа Р. Минковский пришел к выводу, что наиболее отдаленная туманность, которую он наблюдал, имела скорость движения 0,6 с (удаленные космические объекты движутся от нас). Чему равен доплеровский сдвиг для света, приходящего от этой туманности? Найдите наблюдаемую длину волны в спектре света от этой туманности, если длина волны в системе, связанной со звездой, составляет 300 мкм.
34. 8. Бродли открыл в 1728 г. аберрацию света, суть которой состоит в том, что при наблюдении звезды кажутся смещенными из-за того, что Земля движется по своей орбите. Поэтому в опытах, когда рассматриваются звезды, находящиеся вблизи от полюса эклиптики, оптическую ось телескопа следует отклонить вперед (в направлении движения Земли) на $20,5''$. Если считать, что скорость света равна $3,00 \cdot 10^8$ м/сек, то какова величина радиуса земной орбиты, рассчитанная по результатам этого опыта?
34. 9. Предположим, что межпланетное пространство заполнено малыми крупинками пыли со средним удельным весом ρ и приблизительно сферической формы радиуса R .
- Покажите, что для песчинки любого размера отношение силы гравитационного притяжения и радиационного отталкивания Солнцем не зависит от расстояния до него.
 - Используя тот факт, что интенсивность солнечного излучения на земной орбите составляет 1374 Вт/м², и предполагая сечение поглощения излучения равным πR^2 , найдите, для какого значения радиуса R силы радиационного давления и гравитационного притяжения будут полностью скомпенсированы?
 - Учитывая результаты, полученные в гл. 32 «Лекций» (вып. 3), можно ли утверждать, что сечение поглощения песчинки может быть значительно больше πR^2 ?

К главе 38. Соотношение между волновой и корпускулярной точками зрения

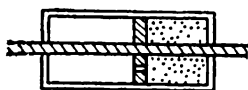
38. 1. В гл. 32 «Лекций» мы показали, что возбужденный атом излучает свою энергию определенными порциями. Это приводит к эффекту ограничения «времени жизни» воз-

бужденного состояния и к образованию конечной ширины соответствующей спектральной линии. Покажите, что эти эффекты, интерпретируемые как неопределенности в измерении энергии и времени излучения фотона, согласуются с принципом неопределенности.

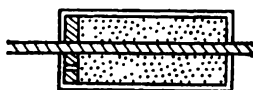
38. 2. Анализируя размерности, оцените «боровский радиус» атома водорода. Покажите, пользуясь принципом неопределенности, что энергия, необходимая для отрыва электрона от протона в атоме водорода, — порядка нескольких электронвольт.
38. 3. В ультрафиолетовой части спектра возбуждения водорода наблюдается серия линий, известных под названием серии Лаймана. Три линии этой серии имеют длины волн: 1216, 1026, 973 Å. Рассчитайте длины волн, отвечающие трем другим возможным линиям в спектре возбуждения водорода, которые могут быть «предсказаны» на основе одних этих данных, а также на основе комбинационного принципа Ритца. Две из них лежат в видимой области (серия Бальмера), а одна — в инфракрасной (первая линия серии Пашена).

К главе 39. Кинетическая теория газов

39. 1. Можно показать, что при адиабатическом сжатии идеального газа выполняется соотношение $PV^\gamma = \text{const}$ [см. формулу (39.14), вып. 4, стр. 13]. С другой стороны, при всех условиях $PV/T = \text{const}$. Используя эти данные, найдите связь между параметрами P и T или V и T для случая адиабатического сжатия.
39. 2. С помощью двухтактного насоса, который используется для накачивания велосипедных шин, можно достигнуть давления $3,5 \text{ кг/см}^2$, начав накачку воздуха при нормальном атмосферном давлении [1 кг/см^2 при 20°C (293 K)]. Какова температура (по шкале Цельсия) воздуха, выходящего из насоса, если для воздуха $\gamma = 1,40$? Потери тепла через стенки насоса пренебрежимо малы.
39. 3. Имеются два идентичных теплоизолированных сосуда. Каждый сосуд разделен пополам перегородкой с закрывающимся отверстием. В одной половине каждого сосуда содержится гелий (газ), а другая половина каждого из сосудов откачана до полного вакуума. Ставятся два опыта:
- Отверстие в перегородке одного сосуда открывается, и газ перетекает в другую половину сосуда, пока не установится равновесие. Затем перегородку начинают медленно передвигать к одному из краев сосуда.
 - Перегородку другого сосуда очень медленно двигают по направлению к вакуумированному краю до упора. Сравните количественно конечное состояние газа в этих двух сосудах (трением при передвигании перегородки можно пренебречь).



Начальное состояние



Конечное состояние

39. 4. а) Представьте себе высокий вертикальный цилиндр, наполненный газом или жидкостью, плотность которых изменяется с высотой. Покажите, что в этом случае зависимость давления от высоты описывается дифференциальным уравнением $dP/dh = -\rho(h)g$.
- б) Решите это уравнение для случая атмосферного воздуха (молекулярный вес μ), если его температура не зависит от высоты.
39. 5. Адиабатической называется атмосфера, в которой давление и плотность в зависимости от высоты удовлетворяют соотношению $P\rho^{-\gamma} = \text{const}$.
- а) Покажите, что температура этой атмосферы линейно уменьшается с высотой, и найдите коэффициент пропорциональности. Такой температурный градиент называется *адиабатическим*. Найдите температурный градиент для земной атмосферы.
- б) Используя аргументы, основанные на энергетических соображениях, покажите, что атмосфера с температурным градиентом, меньшим или большим адиабатического, будет соответственно стабильной или нестабильной относительно конвекции.
39. 6. Цилиндр с непроницаемой абсолютно гладкой перегородкой содержит 1 м^3 газа при давлении 1 атм . Газ медленно сжимается при постоянной температуре до конечного объема $0,4 \text{ м}^3$. Какая работа затрачивается при этом?
39. 7. Два газа, A и B , занимающие один и тот же начальный объем V_0 , при одинаковом начальном давлении P_0 внезапно подвергаются адиабатическому сжатию, каждый — до половины своего первоначального объема. Каково конечное давление в каждом газе по сравнению с начальным, если $\gamma_A = 5/3$ (одноатомный газ), $\gamma_B = 7/5$ (двухатомный)?
39. 8. Найти отношение количеств работы, необходимой для сжатия газов A и B , рассмотренных в задаче 39.7.
39. 9. Два сосуда сферической формы объемом 200 и 100 см^3 соединены короткой трубкой (см. рисунок), в которой имеется изолирующая пористая перегородка. С ее помощью можно добиться равенства давлений в сосудах, но не температуры. Система имеет температуру $t = 27^\circ\text{C}$ и содержит кислород под давлением 760 мм рт. ст. Малая

сфера помещается в сосуд со льдом при 0°C , а большая — в сосуд с паром при 100°C . Какое давление установится в системе? Тепловым расширением сосудов пренебречь.



- 39.10.** Резервуар объемом 50 л соединен с резервуаром объемом 15 л с помощью короткой трубки, в которой имеется специальный клапан давления, позволяющий газу просачиваться из большого резервуара в малый, если давление в большом превышает давление в меньшем на 88 см рт. ст. При $t = 17^\circ\text{C}$ больший резервуар содержит газ при атмосферном давлении, а меньший — полностью откачан. Каково будет давление в последнем, если оба резервуара нагреть до 162°C ?

- 39.11.** Четырехокись азота может диссоциировать с образованием двуокиси азота:



В откачанный сосуд объемом 250 см³ вводится 0,90 г жидкого N_2O_4 . Когда жидкость испаряется (при 0°C), давление становится равным 760 мм рт. ст. Сколько процентов четырехокси азота при этом диссоциирует?

- 39.12.** В изолированном сосуде с подвижной крышкой вначале находится 1 моль идеального одноатомного газа, занимающий объем V_1 при давлении P_1 и температуре $T_1 = 27^\circ\text{C}$. Затем газ медленно нагревается с помощью помещенного внутрь нагревателя, на что полностью тратится энергия 8,31 вт·ч. В результате газ расширяется при постоянном давлении P_1 , нагреваясь до температуры T_2 и занимая конечный объем V_2 . Вычислите работу, совершенную газом при расширении, и запас энергии газа, а также найдите: а) T_2 , б) V_2/V_1 .

К главе 40. Принципы статистической механики

- 40. 1.** В радиометре молекулы газа бомбардируют тонкие легкие крылышки вертушки, которые с одной стороны зачернены, а с другой — покрыты блестящей краской. Когда на крылышки попадает излучение, поглощенная ими при этом энергия уносится в основном молекулами, бомбардирующими зачерненную сторону каждого крылышка. В результате возникает результирующая несбалансированная сила, которая поворачивает вертушку. Рассмотрим сосуд,

в единице объема которого имеется n молекул массой m , при абсолютной температуре T . Тонкое крылышко единичной площади, расположенное внутри такого сосуда, поглощает в единицу времени радиационную энергию, равную Π *вт*, причем эта энергия уносится (изотропно) молекулами, попадающими только на одну сторону крылышка. Оцените примерно силу, действующую на крылышко в воздухе при комнатной температуре.

40. 2. Какая доля молекул газа (газ находится в тепловом равновесии), достигающих в единицу времени поверхности сосуда, обладает кинетической энергией:
- а) большей, чем средняя тепловая,
 - б) в 3 раза большей, чем средняя тепловая?
40. 3. Молярная теплоемкость вещества при постоянном объеме C_V — это количество энергии, необходимое для повышения температуры 1 моля вещества на 1° , если объем остается постоянным. Чему равна молярная теплоемкость при постоянном объеме:
- а) идеального одноатомного газа?
 - б) идеального двухатомного газа?
40. 4. Газ при нормальных давлении и температуре вытекает со скоростью v через гладкую трубку с постоянным поперечным сечением площадью A . Когда газ проходит через волоочную сетку, оказывающую пренебрежимо малое сопротивление потоку, он нагревается. Приобретаемая мощность равна q *вт*. Из трубки газ вытекает со скоростью v' . Напишите уравнения, выражающие законы сохранения массы, энергии и импульса для случая, когда через трубку протекает воздух, а затем найдите:
- а) v' ,
 - б) конечную температуру T ,
 - в) силу тяги F (основную характеристику реактивного двигателя).
40. 5. Обсудите достоинства воздушного реактивного двигателя в свете предыдущей задачи, если при его работе затрачивается 100 кг воздуха и 2,00 кг керосина в секунду. Теплотворная способность керосина составляет около $4,65 \cdot 10^7$ *дж/кг*. Какие обстоятельства могут сделать неправильным полученный вами результат?

40. 6. Закон распределения Максвелла имеет вид

$$\frac{dN}{dv} = Av^2 e^{-bv^2}.$$

Он может быть преобразован так: $y = x^2 e^{-x}$.

а) Нарисуйте график этой функции для $0 \leq x \leq 3,0$ и покажите, что при увеличении x главную роль играет экспоненциальный член.

б) Найдите максимальное значение y .

40. 7. Согласно барометрической формуле $n = n_0 e^{-mgh/kT}$, где kT/mg — характерный параметр задачи. Рассчитайте этот параметр для земной атмосферы и околосолнечного пространства, если

$$u_{\oplus} = 29, \quad T_{\oplus} = 300 \text{ К}, \quad g_{\oplus} = 9,8 \text{ м/сек}^2,$$

$$u_{\odot} = 1,5, \quad T_{\odot} = 5500 \text{ К}, \quad g_{\odot} = 2,7 \cdot 10^2 \text{ м/сек}^2.$$

Значения u , g , T относятся соответственно к условиям у поверхности Солнца ($\odot$) и Земли ($\oplus$).

К главе 41. Броуновское движение

41. 1. Рассчитайте (и запомните):

а) температуру T , при которой $kT = 1 \text{ эв}$;

б) величину kT (в эв) при комнатной температуре;

в) длину волны фотона, соответствующей квантовому переходу с разностью энергий 1 эв .

41. 2. Закон распределения излучения абсолютно черного тела имеет вид

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)}.$$

Перейдя к новой переменной $x = \hbar \omega / kT$, покажите, что:

а) проинтегрированная по всем частотам полная интенсивность излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры;

б) частота ω_m , при которой $I(\omega)$ имеет максимальное значение, пропорциональна абсолютной температуре.

41. 3. Найдите относительные интенсивности света с длиной волны $0,31 \text{ мк}$, излучаемого двумя абсолютно черными телами, которые находятся при температуре 2000 и 4000 К соответственно.

К главе 42. Применения кинетической теории

42. 1. Энергия активации, теплота испарения, теплоты образования или диссоциации и т. д. обычно выражаются в джоулях на 1 г-моль или в электронвольтах на 1 атом . Сколько дж/г-моль содержится в 1 эв/атом ? (Химики обычно

используют энергетическую единицу, называемую килокалорией; $1 \text{ ккал} = 4186 \text{ Дж.}$)

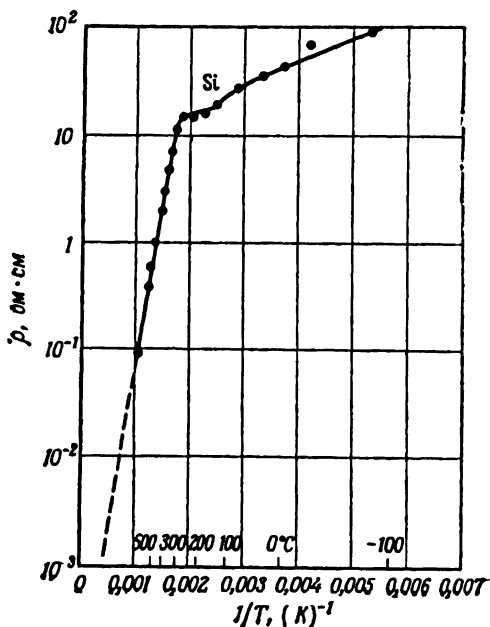
42. 2. а) Постройте график плотности паров ртути в зависимости от $1/T$ в полулогарифмической шкале (соответствующие данные возьмите из учебников физики и химии). С помощью графика определите теплоту испарения ртути. Сравните ваши результаты с табличной величиной.

б) Прodelайте то же самое для воды.

42. 3. В температурном интервале $0\text{—}300^\circ\text{C}$ теплота возгонки ртути изменяется только на 3% (в среднем это составляет около $0,61 \text{ эв/атом}$). Какую ошибку вы сделаете при расчете плотности паров ртути при 0°C , если используете теплоту возгонки при 300°C вместо правильного значения при 0°C ?

Замечание. Незначительное в процентном отношении отличие в показателе экспоненты может привести к большой ошибке.

42. 4. Сопротивление почти чистого кремния в зависимости от температуры показано на прилагаемом графике. Сделайте качественный вывод о природе прямого тока в этом веществе выше и ниже 300°C .



К главе 43. Диффузия

43. 1. «Диаметр» молекулы кислорода приблизительно равен $d = 3 \text{ \AA}$. Вычислите среднюю длину свободного пробега и среднее время между двумя столкновениями для молекул кислорода при нормальных давлении и температуре.
43. 2. Сосуд содержит 10^{24} молекул газа; средняя длина свободного пробега одной молекулы равна l . Для какой длины пробега L вероятность того, что хоть *какая-нибудь* из молекул пройдет в сосуде без столкновения путь, превышающий L , меньше 50%?
43. 3. Если в веществе существует температурный градиент, то происходит перенос тепла, причем количество переносимой энергии в единицу времени пропорционально этому градиенту (без учета конвекции). Коэффициент пропорциональности, приведенный к единице площади и к единице температурного градиента, называется *теплопроводностью* κ . Таким образом, $dQ/dt = \kappa A (dT/dx)$. Покажите, что в отсутствие конвекции теплопроводность газа равна (см. § 6 гл. 43 «Лекций», вып. 4, стр. 98)

$$\kappa = knv \frac{l}{\gamma - 1} = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{kv}{\sigma_c},$$

где k — постоянная Больцмана, n — концентрация молекул, v — средняя тепловая скорость, l — средняя длина свободного пробега, γ — постоянная в уравнении адиабаты, $\sigma_c = 1/nl$.

Примечание. Интерпретируйте теплопроводность как перенос внутренней (тепловой) энергии U через плоскость внутри вещества, как это было сделано при рассмотрении процесса диффузии.

43. 4. Когда в жидкости существует градиент скорости, причем скорость зависит от расстояния в направлении, перпендикулярном потоку, то в результате возникает тормозящий движение фактор, называемый *вязкостью*. В газе его появление обусловлено переносом импульса. Через каждую плоскость импульс переносится молекулами, находящимися по обе стороны от нее на расстоянии, не превышающем длину свободного пробега. Если поток движется в направлении оси x и существует градиент скорости v_x в направлении оси y , то сила вязкости, отнесенная к единице площади плоскости, перпендикулярной оси y , равна $F/A = \eta dv_x/dy$. Покажите, что для газа коэффициент

вязкости η приближенно равен

$$\eta = nvm l = \frac{vm}{\sigma_c},$$

где n — концентрация молекул, v — средняя тепловая скорость, m — масса молекулы, l — длина свободного пробега, а $\sigma_c = 1/nl$.

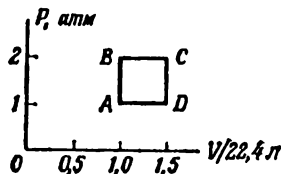
43. 5. Отметим, что теплопроводность и вязкость газа не зависят от давления. (Однако при малых давлениях процесс переноса энергии и импульса в газе уже нельзя описывать с помощью найденных выше коэффициентов вязкости и теплопроводности.) Измените соответствующим образом формулу для количества энергии, переносимой между двумя поверхностями, имеющими температуры T и $T + \Delta T$ и находящимися на неизменном расстоянии D друг от друга, если $l \gg D$. Прodelайте то же самое, рассматривая процесс переноса импульса между двумя такими поверхностями, движущимися со скоростями v и $v + \Delta v$.
43. 6. Два газа A и B с плотностями частиц n_A и n_B находятся при определенной температуре T_0 . Отдельный ион, за которым ведется наблюдение, обладает подвижностями μ_A в газе A и μ_B в газе B ($\mu = v_{др}/F$, где F — сила, см. вып. 4, стр. 90). Какова подвижность иона в смеси этих газов с плотностью $n_A + n_B$ при той же температуре T_0 ?

К главе 44. Законы термодинамики

44. 1. Идеальный газ, имеющий $\gamma = 4/3$, последовательно переводится из состояния A (давление $P = 1$ атм, объем $V = 22,4$ л, температура $t = 273$ К) в состояние C ($P = 2$ атм, $V = 33,6$ л) либо по пути ABC , либо по пути ADC .

а) Покажите, что изменение энтропии в обоих случаях одинаково.

б) Рассчитайте это изменение.



44. 2. Переведите идеальный цикл Карно $abcd$ (см. фиг. 44.6 «Лекций», вып. 4, стр. 109) на диаграмме $p - V$ между состояниями, характеризующимися параметрами T_1 и T_2 и (p_a, V_a) , (p_c, V_c) , в цикл $abcd$ на диаграмме температура — энтропия.

44. 3. Температура парогенератора на современной теплоэлектростанции, использующей перегретый пар, равна 600°C . В холодильник подается речная вода при $t=20^\circ\text{C}$. Каков максимальный к. п. д., который может быть получен на такой станции?
44. 4. В идеальном обратимом двигателе, в котором в качестве рабочего тела используется 28 г азота ($\gamma = 7/5$), рабочий цикл $abcd$ происходит без использования золотника (см. фиг. 44.6 «Лекций», вып. 4, стр. 109). Температура нагревателя 400 K , холодильника 300 K . Начальный объем газа в точке a равен $6,0\text{ л}$, а объем в точке c составляет $18,0\text{ л}$.
- При каком объеме V_b нужно прекратить подачу в цилиндр тепла (изотермическое расширение) и, теплоизолировав его, начать адиабатическое расширение от V_b к V_c ? При каком объеме V_d начнется адиабатическое сжатие?
 - Какое количество тепла поступает в систему на участке $a \rightarrow b$ цикла?
 - Какое количество тепла уходит из системы на участке $c \rightarrow d$?
 - Чему равен к. п. д. двигателя?
 - Чему равно изменение энтропии на 1 г рабочего вещества на участках $a \rightarrow b$ и $c \rightarrow d$?

Примечание. Вы должны получить, что для цикла Карно в случае идеального газа отношения V_b/V_a и V_c/V_d равны.

44. 5. Беззаботный экспериментатор, торопясь уйти, оставил золотник резервуара, наполненного гелием, неплотно закрытым. Газ, первоначально находившийся при давлении 200 атм , медленно изотермически выходит из резервуара при температуре 20°C . Чему равно изменение энтропии на 1 кг газа?

К главе 45. Примеры из термодинамики

45. 1. Солнце излучает приблизительно как черное тело при температуре 5700 K . Если солнечным светом облучать абсолютно черную медную сферу, расположенную на расстоянии 1 А. Е. от Солнца, то какая равновесная температура будет достигнута при этом? (Диаметр Солнца виден с Земли под углом $0,50^\circ$.)
15. 2. Солнечный свет падает перпендикулярно на некоторую область, находящуюся в Экваториальной Африке. Если

поверхность излучает как абсолютно черное тело, то какова максимальная температура этой области? (Солнечная постоянная равна 1395 Вт/м^2 .)

45. 3. Черное тело радиусом r при температуре T окружено зачерненной с обеих сторон тонкой оболочкой радиусом R . Найдите, насколько такой радиационный экран уменьшает скорость охлаждения тела. (В пространстве между телом и оболочкой — вакуум; потеря, связанных с теплопроводностью, нет.)
45. 4. Плотность в центре Солнца равна приблизительно 80 г/см^3 , а температура $\sim 13 \cdot 10^6 \text{ К}$. Вещество Солнца почти целиком состоит из протонов и электронов. Найдите давление газа и радиационное давление в центре Солнца.
45. 5. Скрытая теплота испарения воды равна приблизительно $2,44 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3$, а плотность пара при 100°С составляет $0,598 \text{ кг/м}^3$. Используя уравнение Клаузиуса — Клапейрона, найдите скорость изменения температуры кипения с высотой в град/км на уровне моря. Положите температуру воздуха равной 300 К .
45. 6. Покажите, что для идеального газа, внутренняя энергия которого зависит только от температуры, разность между молярными теплоемкостями при постоянном давлении и постоянном объеме равна газовой постоянной R :

$$C_p - C_v = R.$$

45. 7. При 0°С удельный объем насыщенного водяного пара равен $206 \text{ м}^3/\text{кг}$. Какова скрытая теплота испарения в Дж/кг при этой температуре? (Определите dp/dt из таблиц, рассчитайте L и сравните с табличным значением.)
45. 8. Тело поглощает фиксированную долю A полного излучения, падающего на его поверхность, и отражает остаток. Покажите, что при температуре T оно излучает энергию $A\sigma T^4$.
45. 9. а) Используя термодинамические соображения, покажите, что если вещество при замерзании расширяется, то его температура замерзания должна уменьшаться с увеличением давления.
- б) Бытует мнение, что катание на коньках связано с плавлением льда под коньком. Приняв эту гипотезу, рассчитайте самую низкую температуру льда на катке, при которой катание на коньках еще возможно.

К главе 47. Звук. Волновое уравнение

47. 1. Найдите отношение скоростей звука в гелии и водороде при одной и той же температуре.
47. 2. В два свистка одинаковой длины вдуваются: воздух, охлажденный почти до температуры жидкого воздуха (-180°C), и теплый воздух.
Один свисток издает звук ровно на октаву выше чем другой (т. е. удвоенной частоты). Какова должна быть температура воздуха, вдуваемого во второй свисток?
47. 3. Если вы вдохнете гелий и начнете разговаривать, то звук вашего голоса будет неестественно высоким. Если все ваши резонансные полости («пустоты в вашей голове») будут заполнены гелием, а не воздухом, то насколько увеличится каждая *резонансная частота*? Если вы при этом поете, то как повлияет наличие гелия на тональность, в которой вы поете?
47. 4. Рассмотрим постоянную плоскую звуковую волну с частотой 1000 сек^{-1} , в которой экстремумы давления отличаются на $\pm 1 \text{ дин/см}^2$ от среднего атмосферного давления $1 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$.
- а) Чему равно изменение плотности, сопровождающее распространение такой волны?
 - б) Чему равно максимальное смещение χ_m частиц?
 - в) Чему равна интенсивность волны?
(Примите скорость звука равной 340 м/сек.)
47. 5. Зажмите кончиками пальцев обеих рук резиновую полосу длиной около 5 см , а затем попросите товарища слегка щелкнуть по резине. Послышится звук. Потом растяните полоску в 2, 3, 4, 5 раз, *не меняя массу* полоски между руками, и повторите ту же процедуру. Обсудите результаты наблюдения. Почему ничего похожего не происходит со струной скрипки?
- 47.6. Однородная абсолютно гибкая струна линейной плотности $\sigma \text{ кг/м}$ растянута с натяжением T . Сформулируйте волновое уравнение, описывающее поперечное смещение струны y , и найдите скорость распространения возмущения вдоль струны. Используйте предположение о том, что $dy/dx \ll 1$ во всех точках в любой момент времени, и рассмотрите только плоские колебания струны. Отметим, что компонента натяжения струны в поперечном направлении очень близка к $T dy/dx$.

47. 7. Покажите, что выражение $u = Ae^{i(\omega t - kx)}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при условии, что ω и k связаны соотношением $\omega = vk$.

К главе 48. Биения

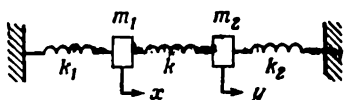
48. 1. Фазовая скорость волны с длиной волны λ , распространяющейся по водной поверхности, если пренебречь поверхностным натяжением и конечной глубиной водоема, $v_{\text{фаз}} = \sqrt{g\lambda/2\pi}$. Покажите, что групповая скорость волны равна половине фазовой. Чему равна групповая и фазовая скорости волны длиной 1000 м?
48. 2. Если в предыдущей задаче рассматривать влияние поверхностного натяжения, то можно показать, что фазовая скорость волны на поверхности жидкости с плотностью ρ и с поверхностным натяжением T равна $v_{\text{фаз}} = (2\pi T/\lambda\rho + g\lambda/2\pi)^{1/2}$, когда глубина водоема достаточно велика. Найдите групповую скорость такой волны.
48. 3. Найдите фазовую скорость ряби с длиной волны 1,0 см на поверхности:
- а) воды (поверхностное натяжение 70 дин/см);
 - б) этилового спирта (поверхностное натяжение 26 дин/см).
48. 4. Найдите длину волны и частоту ряби на поверхности воды, которая движется с минимальной скоростью.
48. 5. Длинный дизельный товарный поезд идет в гору со скоростью 5,0 м/сек по прямому пути. Когда он достигает туннеля в отвесной скале, машинист дает длинный непрерывный гудок с основной частотой 340 гц. Звук гудка и его эхо, возникающее при отражении от стены, слышат машинист и человек, находящийся на земле вблизи последнего вагона. Какой частоты звук слышит каждый из них?

К главе 49. Собственные колебания

49. 1. Два тела с массами m_1 и m_2 прикреплены к двум стенам пружинами, коэффициенты упругости которых k_1 и k_2 соответственно. Друг с другом они соединены пружиной

с жесткостью k (см. рисунок). Напишите уравнения движения этих тел, положив

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2.$$



49. 2. Подставьте $x = Ae^{i\omega t}$ и $y = Be^{i\omega t}$ в полученные выше уравнения и найдите частоты и отношения амплитуд грузиков для нормальных колебаний.

49. 3. Покажите, что функция

$$f(x, y, z, t) = Ae^{i\omega t} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c},$$

где

$$\omega^2 = v^2 \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right),$$

а l, m, n — целые числа, большие или равные единице,

а) удовлетворяет трехмерному волновому уравнению (описывающему волну со скоростью распространения v);

б) равна 0 при $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$;

в) осциллирует во времени подобно синусоиде.

49. 4. Полагая, что в предыдущей задаче $a : b : c = 1 : 2 : 3$, найдите 10 минимальных частот, выраженных через наименьшую частоту ω_0 . Расположите их в порядке возрастания и отложите на вертикальной шкале.

49. 5. Используя понятие о бесконечно длинных периодических волнах, распространяющихся в противоположных направлениях, выясните, что произойдет, если идеальная однородная натянутая струна длиной L оттянута от средней точки на расстояние A , а затем отпущена. Нарисуйте несколько положений струны в различные моменты времени в течение одного полупериода первой гармоники.

К главе 50. Гармоники

50. 1. Используя фурье-разложения прямоугольной волны

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right),$$

покажите, что

$$а) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$б) 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$в) 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \\ = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

50. 2. Разложите функцию $g(x) =$  в интеграл Фурье и покажите, что полученные результаты согласуются с тем, что получается при интегрировании функции, использованной в предыдущей задаче.

50. 3. Используя результат предыдущей задачи, покажите, что

$$а) 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96},$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2^4}{2^4 - 1} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

50. 4. В гл. 45 нам надо было вычислить интеграл

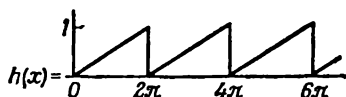
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Теперь вы можете это сделать, умножив числитель и знаменатель на e^{-x} , разложив подынтегральную функцию в ряд и интегрируя почленно. Получим

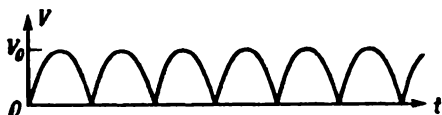
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du \left[1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right] = 6 \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Проверьте это.

50. 5. Найдите фурье-разложения пилообразной функции, которая описывает ток, протекающий в цепи горизонтальной развертки электронного осциллографа:



50. 6. Выпрямитель есть устройство, которое преобразует синусоидальную волну, например напряжения с амплитудой V_0 , в напряжение следующего вида:



- а) Вычислите среднее значение $V(t)$. Оно называется выходным напряжением.
 - б) Найдите амплитуду второй гармоники в выходном напряжении.
50. 7. С трансформатора снимается выходное напряжение, пропорциональное $V_{\text{вых}} = V_{\text{вх}} + e(V_{\text{вх}})^3$. Выясните, к каким эффектам приведет учет кубического члена, если:
- а) входная волна синусоидальная;
 - б) имеются две или более входные синусоидальные волны с разными частотами.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Вып. 1

СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ •
ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

К главе 1. Атомы в движении

- 1.1. а) Известно, что грамм-молекула любого вещества содержит A молекул ($A = 6,02 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро) и при нормальных условиях занимает в газообразном состоянии объем $v_0 = 22,4$ л $= 22\,400$ см³. Следовательно, в 1 см³ газообразного воздуха содержится n_v «молекул»:

$$n_v = \frac{A}{v_0} = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

Плотность газообразного и жидкого воздуха равна соответственно

$$\rho_v = m n_v \text{ и } \rho_{ж} = m n_{ж},$$

где m — масса «молекулы воздуха», а $n_{ж}$ — число «молекул» в 1 см³ жидкого воздуха, поэтому

$$\frac{\rho_{ж}}{\rho_v} = \frac{n_{ж}}{n_v} \text{ и } n_{ж} = \frac{\rho_{ж}}{\rho_v} n_v = 2,7 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

- б) Зная плотность воздуха, вычисляем массу «молекулы» воздуха

$$m = \frac{\rho_v}{n_v} = 3,7 \cdot 10^{-23} \text{ г}.$$

- в) Представим себе молекулу воздуха в виде твердого шарика радиусом r . Ясно, что молекулы столкнутся, если их центры подойдут на расстояние, меньшее или равное $2r$. За единицу времени молекула пролетает путь, равный ее средней скорости v . При этом она сталкивается со всеми молекулами, центры которых окажутся в «захватываемом» ею объеме $\pi(2r)^2 v$, т. е. испытывает $4\pi r^2 n_v v$ столкновений (n_v — число молекул в 1 см³ воздуха при нормальных условиях).

Считая для оценки, что между двумя последовательными столкновениями молекула проходит равные расстояния λ (это и есть средняя длина свободного пробега) и что все молекулы одинаковы, находим

$$\lambda = \frac{v}{(2r)^2 \pi v n_v} = \frac{1}{4\pi r^2 n_v}.$$

Полагая $r \approx 10^{-8}$ см, а $n_v = n_v$, получаем $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-5}$ см. От давления зависит число частиц в 1 см³, которое при сравнительно малых давлениях просто пропорционально давлению, так что можно написать $n = c p$ (c — коэффициент пропорциональности) и $\lambda = 1/(4\pi r^2 c p)$, откуда $\lambda p = \text{const}$. Поэтому для длины свободного

пробега молекулы при разных давлениях, но при одной и той же температуре газа имеем

$$\lambda_0 p_0 = \lambda_1 p_1$$

Таким образом, давление, при котором длина свободного пробега составляет 1 м, равно

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} p_0 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ атм.}$$

если положить, что $\lambda_0 = \lambda$, а $p_0 = 1 \text{ атм.}$

- 1.2. Предположим, что объем древней капли был равен примерно 1 см^3 , т. е. что капля содержала около $N \approx 3 \cdot 10^{22}$ молекул. Естественно предположить, что за огромный промежуток времени, прошедший от палеозойской эры до наших дней, молекулы капли равномерно распределнились по всей имеющейся на Земле воде. В этом случае студент-геолог проглотил $n = (v/V)N$ молекул нашей капли, где v — объем выпитой им воды, а V — объем всей воды на Земле. Оценим V .

Будем считать, что вода покрывает равномерно весь земной шар слоем толщиной $d \approx 3 \text{ км}$. В этом случае

$$V = 4\pi R_3^2 d \approx 1,5 \cdot 10^{24} \text{ см}^3.$$

где R_3 — радиус Земли. Эта оценка очень хорошо совпадает с расчетами ученых количества воды на земном шаре, а именно с величиной $1,45 \cdot 10^{24} \text{ см}^3$. Положив $v = 150 \text{ см}^3$ (три четверти стакана), получим $n \approx 3$.

- 1.3. Рассмотрим сначала, как происходит испарение, если стакан накрыть крышкой и откачать из-под нее весь воздух. Пока пара под крышкой мало, жидкость будет интенсивно испаряться. Но одновременно с процессом испарения, т. е. с тем, что из воды все время вылетают молекулы воды, какое-то число молекул пара возвращается в воду, т. е. конденсируется. При этом по мере увеличения плотности пара таких молекул становится все больше и больше. Через некоторое время в стакане устанавливается динамическое равновесие: число вылетающих из воды молекул становится равным числу молекул, возвращающихся обратно. Если убрать крышку и откачивать пары, вода будет только испаряться, причем число вылетающих молекул останется таким же, как и тогда, когда стакан был накрыт: ведь процесс испарения зависит только от движения молекул в воде, число же возвращающихся в воду молекул зависит от количества водяных паров в воздухе над стаканом.

Оценим количество вылетающих из воды молекул в единицу времени при равновесии. Проще вычислять не это число, а равное ему число конденсирующихся молекул пара. Пусть в единице объема воздуха над крышкой содержится n молекул водяного пара. Число n зависит только от температуры воздуха, оно измерено экспериментально; существуют таблицы зависимости n от температуры. За промежуток времени t поверхности воды достигнут только те молекулы пара (средняя скорость молекул v), которые находились в начальный момент времени не дальше, чем $v_\perp t$ ($v_\perp$ — вертикальная скорость молекулы) и двигались к жидкости, а не в обратную сторону. Другими словами, поверхности воды достигает половина тех молекул, которые находятся в объеме $S v_\perp t$ над стаканом (S — площадь поперечного сечения стакана).

Какое же значение выбрать для $v_\perp$? Ведь молекулы могут двигаться к жидкости под произвольными углами при одном и том же

абсолютном значении скорости. Ясно, что это должна быть усредненная по всем направлениям вертикальная скорость молекулы. Делая небольшую ошибку по сравнению с точным расчетом, мы примем ее равной половине самой скорости молекулы. Следовательно, в единицу времени конденсируется примерно $(1/4)nSu$ молекул пара.

Как уже отмечалось, число испаряющихся молекул при снятой крышке будет таким же, как и при закрытой крышке. Но число конденсирующихся молекул зависит от того, сколько молекул пара содержится в единице объема воздуха над поверхностью жидкости. Будем считать, что влажность воздуха близка к нормальной.

Влажностью (относительной) называют отношение числа содержащихся в воздухе молекул водяного пара в данный момент времени к максимально возможному (т. е. числу молекул пара в единице объема при равновесии). Нормальной считается влажность около $60 \div 80\%$. Мы положим, что влажность воздуха 50% , т. е. в единице объема воздуха содержится $n/2$ молекул водяного пара. В этом случае, как следует из предыдущего рассмотрения, в воду из пара должны конденсироваться $(1/8)nSu$ молекул. Однако так было бы лишь при условии, что над водой находятся только водяные пары, а не смесь воздуха с паром. При наличии воздуха молекулы из воды отлетают без столкновений только на длину свободного пробега λ (это расстояние $\sim 3 \cdot 10^{-5}$ см; задачу 1.1), дальше они движутся от поверхности жидкости с очень малой скоростью (по сравнению с тепловой). Поэтому число конденсирующихся молекул определяется не плотностью пара на большом расстоянии от воды, а плотностью пара на расстоянии порядка длины свободного пробега. Считая, что плотность пара в перпендикулярном поверхности воды направлении меняется линейно, а на расстоянии примерно 1 см она равна уже $n/2$, находим, что плотность водяных паров на расстоянии λ приблизительно равна

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2} (1 - \lambda) = n \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Таким образом, с поверхности воды в единицу времени испаряется около $(1/8)n\lambda Su$ молекул воды. После этого рассмотрения мы можем ответить на поставленные в задаче вопросы.

- а) В стакане воды содержится $n_{ж}Sh$ молекул воды, где $n_{ж} = 3 \cdot 10^{22}$ см⁻³ — число молекул воды в 1 см³ (см. задачу 1.1), а h — высота стакана, которую примем равной 10 см. Вся вода испарится за время

$$\frac{8n_{ж}h}{\lambda nu} \approx 1,2 \cdot 10^8 \text{ сек} \approx 14 \text{ суток}$$

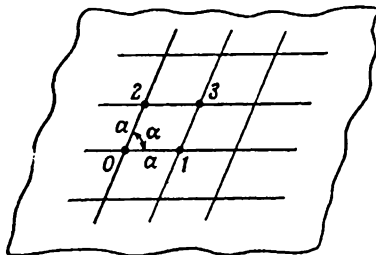
(при $t = 25^\circ\text{C}$, $v = 600$ м/сек, $n = 10^{18}$ см⁻³).

- б) С площадки в 1 см² каждую секунду испаряется $n\lambda u/8 \approx 10^{18}$ молекул.
в) В среднем за год должно испариться количество воды, равное среднегодовому количеству осадков. Конечно, полученное нами число в п. (а) превышает количество осадков, так как для расчетов мы выбрали такие условия атмосферы, когда преобладает процесс испарения.

1.4. Хотя атомы и находятся в непрерывном движении, это еще не означает, что они в среднем изменяют свое относительное расположение. В частности, атом, колеблющийся около своего положения равновесия в кристаллической решетке, в среднем покоится в нем, так что

кристаллические тела не меняют своей формы до тех пор, пока амплитуда колебания составляющих их частиц мала по сравнению с расстояниями между ближайшими атомами. При достаточно сильном нагревании эта амплитуда становится столь большой, что атомы уже больше не «привязаны» к определенному месту, — наступает процесс плавления, и твердое тело меняет форму.

- 1.5. Рассмотрим часть грани кристалла. Расположение атомов в кристалле таково, что каждый атом окружен определенным образом расположенными другими атомами. Это означает, что атомы одного сорта расположены в так называемых эквивалентных точках, т.е. точках,



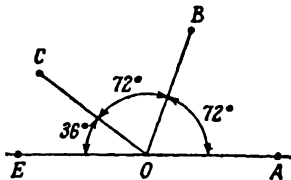
Фиг. 1.

окружение которых совершенно одинаково. Минимальное расстояние между эквивалентными точками a называется *периодом решетки*. На фиг. 1 эквивалентные точки — это точки 0, 1, 2, 3.

Ближайшие эквивалентные точки образуют некоторую плоскую фигуру — «ячейку» (на рисунке это ромб с вершинами в точках 0, 1, 2, 3), а если рассматривать весь кристалл, а не его грани, то — объемную фигуру. При формировании кри-

сталла нарастает все больше и больше ячеек, поэтому форма грани кристалла зависит от геометрической формы ячейки. Разумеется, скорость роста кристалла в разных направлениях различна, так что внешние грани кристалла не являются просто повторением формы ячейки. Но совершенно ясно, что углы между сторонами грани кристалла равны углам между сторонами ячейки, поэтому для ответа на поставленный в задаче вопрос нам достаточно указать, что не может существовать ячеек в форме правильного пятиугольника.

Приведем доказательство от противного. Пусть ячейка кристалла — правильный пятиугольник, а O и A — эквивалентные точки



Фиг. 2.

(фиг. 2). Очевидно, эквивалентной должна быть и точка E (если эквивалентная точка находится на расстоянии a от O при перемещении вправо, то должна быть эквивалентная точка и при перемещении влево на то же расстояние). Другие эквивалентные точки можно построить, последовательно поворачивая отрезок OA на угол $2\pi/5 = 72^\circ$. После первого поворота получим точку B , а после второго — точку C . Но расстояние

$EC < a$, что противоречит исходному предположению (расстояние между эквивалентными точками не меньше, чем a). Таким образом, грань кристалла не может быть правильным пятиугольником. Можно строго показать, что аналогичное построение непротиворечиво только в том случае, если ячейки кристалла имеют форму параллелограмма или правильных треугольника и шестиугольника.

- 1.6. Беспредельно ударяясь о стенки сосуда, молекулы газа действуют на них с некоторой силой. Действительно, если сделать одну из стенок

сосуда подвижной, то, чтобы удержать ее под градом ударов молекул в неизменном положении, нужно приложить к ней определенную силу. Величина этой силы, отнесенная к единице площади стенки, и есть давление газа. Понятно, что давление будет тем больше, чем больше молекул ударяется о единичную площадку поверхности стенки и чем энергичнее каждый удар. Если плотность газа не особенно велика, то число ударяющихся о стенку молекул просто пропорционально плотности. Сила же удара молекулы о поршень зависит от скорости молекулы: чем быстрее движется молекула, тем сильнее она наносит удар. С другой стороны, понятно, что при данной плотности газа к поршню подлетает и ударяется о него тем больше молекул, чем больше их скорость. Таким образом, мы видим, что от скорости молекул зависит и число ударов о поршень, и сила удара. Поэтому зависимость давления газа от средней скорости молекул — нелинейная. Точный расчет показывает, что давление газа пропорционально среднему квадрату скорости, а не средней скорости.

- 1.7. Теплота, действительно, есть не что иное, как движение молекул, но движение хаотическое, беспорядочное. Когда тело в целом поконится, его молекулы тем не менее могут обладать большой энергией хаотического движения. При этом мы говорим, что тело сильно нагрето (обладает высокой температурой). Если продолжать нагревать тело, т. е. дальше увеличивать его температуру, то средняя скорость беспорядочного хаотического движения молекул будет возрастать.

Молекулы холодного, но быстро движущегося бейсбольного мячика наряду с хаотической скоростью обладают еще и скоростью направленного движения, одинаковой для всех молекул, которая характеризует энергию движения мячика как целого, а не его внутреннее состояние. Скорость же беспорядочного движения молекул холодного мячика меньше, чем нагретого.

- 1.8. Как бы ни были отполированы трущиеся поверхности машины, они никогда не будут совершенно гладкими. В действительности эти поверхности можно представить себе покрытыми (хотя и очень маленькими) бугорками, ступеньками и т. п. При движении таких поверхностей относительно друг друга происходит множество микроскопических ударов, неровности сминают друг друга. В результате таких беспорядочных ударов в конце концов увеличивается скорость хаотического движения молекул (в § 2 «Лекций», вып. 1, показано, что при ударе молекулы о движущуюся ей навстречу поверхность скорость молекулы увеличивается). А это означает, что трущиеся тела нагреваются.

- 1.9. Кусок резины состоит из длинных перекрывающихся цепочек атомов, которые беспорядочно ориентированы в пространстве. При растягивании резины, т. е. когда к ней приложена некоторая внешняя сила, часть этих цепочек вытягивается вдоль внешней силы. При этом «ориентирующиеся» цепочки атомов сталкиваются с другими молекулами резины и заставляют их двигаться быстрее, подобно тому какдвигаемый в сосуд с газом поршень заставляет двигаться быстрее молекулы газа. Поэтому температура куска резины при его растяжении увеличивается, т. е. резина нагревается.

- 1.10. Резина с подвешенным на ней грузом растянута. Это значит, что некоторые молекулярные цепочки атомов расположены вдоль направления растяжения. В то же время все молекулы (цепочки) участвуют в беспорядочном тепловом движении и непрерывно сталкиваются друг с другом. В результате таких столкновений первоначально

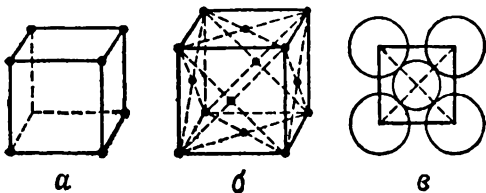
ориентированные цепочки атомов стремятся снова запутаться с остальными молекулами, но этому мешает приложенная внешняя сила. При нагревании резины скорость движения молекул увеличивается, усиливается бомбардировка ориентированных цепей, что приводит к более сильному их запутыванию. Последнее означает, что длина натянутой резины при нагревании уменьшается.

- 1.11. Чтобы поместить в ящик максимальное число шариков, их нужно упаковывать аккуратно, т.е. в определенном порядке. Пусть этот порядок таков, что центры восьми ближайших шариков располагаются в вершинах куба. Сторона куба равна, очевидно, диаметру шарика d . На каждый куб приходится по одному шарiku, поскольку внутри куба попадает $1/8$ часть каждого из восьми шариков, центры которых находятся в вершинах (фиг. а). Так как объем шара равен $(4\pi/3)(d^3/8) \approx 0,52 d^3$, то объем, занимаемый шариками, составляет 52% общего объема. Более плотной является упаковка, при которой «основная ячейка» упаковки представляет собой куб с шариками, занимающими не только вершины, но и центр куба. В этом случае соприкасаются шарики, находящиеся в вершинах и центре куба, поэтому удвоенный диаметр шарика равен пространственной диагонали куба, т.е. сторона куба равна $2d/\sqrt{3}$. Это больше, чем в предыдущем случае, однако теперь на один куб приходится уже два шарика, и, как легко подсчитать, шарики занимают 68% общего объема. Однако существует способ еще более плотной упаковки: кроме вершин шарик следует поместить в центры граней куба (фиг. б). При этом шарик, находящийся в центре грани, соприкасается с шариками, занимающими вершины (фиг. в). Стало быть, длина ребра куба равна $d\sqrt{2}$. На один куб в этом случае приходится 4 шарика, поскольку вклад от шариков, расположенных в центрах граней, составляет три шарика (каждый шарик, расположенный в центре грани, находится наполовину внутри куба, а граней у куба шесть). Следовательно, теперь шарики занимают 73% общего объема. Мы разобрали случаи упаковки, когда основная ячейка является кубической. Существует еще способ плотной упаковки с основной ячейкой, представляющей собой правильную гексагональную призму, причем плотность шариков в такой упаковке та же самая, что и в последнем случае «гранецентрированной» основной ячейки (подробнее см. «Лекции», вып. 7, стр. 10—12).

Определим, сколько шариков можно поместить в сосуде. Число основных ячеек в объеме V равно $V/(d\sqrt{2})^3$, а максимальное число шариков $4V/(d\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} V/d^3$. Коэффициент упаковки, т.е. отношение занимаемого шариками объема ко всему объему сосуда, равен

$$\frac{N}{V} \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\sqrt{2} \pi}{6} \approx 0,74.$$

Он примерно на 20% превосходит коэффициент упаковки при случайном заполнении сосуда шариками.



К главе 4. Сохранение энергии

- 4.1. Треугольник ACB — равнобедренный, поэтому из соображений симметрии натяжения участков AC и CB проволоки одинаковы:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Для наглядности представим себе, что груз весом W уравновешен при помощи другого грузика, который подвешен на маленьком блоке, как показано на рисунке. Вопрос о натяжении проволоки сводится, таким образом, к вопросу о величине веса грузика, поскольку натяжение проволоки равно весу грузика. Обозначим поэтому вес грузика также через T .

Предположим теперь, что грузик T поднялся на небольшую высоту h . При этом груз W опустится на расстояние H , а проволока BC повернется на малый угол $\Delta\alpha$. Размеры проволок AC и BC и расстояние AB между точками крепления таковы, что угол ACB прямой. Следовательно, $H = CC' \sin 45^\circ = h/\sqrt{2}$ (угол $\Delta\alpha$ очень мал, поэтому CC' можно считать продолжением AC).

Согласно закону сохранения энергии, увеличение потенциальной энергии грузика T равно уменьшению потенциальной энергии груза W , т. е. $Th = WH$, откуда

$$T = \frac{H}{h} W = \frac{W}{\sqrt{2}} \approx 35,5 \text{ кг}.$$

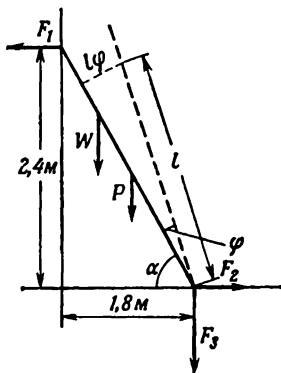
Разумеется, задачу можно было решить без введения дополнительного грузика весом T , что мы сделали просто для наглядности. В таком случае рассуждения должны быть следующими. Рассмотрим виртуальное перемещение системы, состоящее, например, в повороте проволоки BC на небольшой угол $\Delta\alpha$. Участок AC при этом растянется на длину CC' , а груз W опустится на высоту $H = CC' \cdot \sin 45^\circ$. Работа сил натяжения складывается из работы силы натяжения на участке AC , равной $T \cdot CC'$ (CC' — продолжение линии AC), и работы силы натяжения на участке BC . Последняя при данном выборе виртуального перемещения равна нулю, так как малое перемещение CC' перпендикулярно BC и, следовательно, перпендикулярно рассматриваемой силе натяжения. Поэтому из принципа виртуальных работ

$$T \cdot CC' = WH,$$

откуда снова $T = W \sin 45^\circ = W/\sqrt{2}$.

- 4.2. Введем следующие обозначения: F_1 — сила давления роликов на вертикальную стену; F_2 и F_3 — горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления лестницы на землю. Очевидно, что F_1 направлена влево, F_2 — направо, а F_3 — вниз. Силы, приложенные к лестнице, равны по величине F_1 , F_2 и F_3 и направлены в противоположных направлениях.

Рассмотрим следующие виртуальные перемещения лестницы. Пусть она сместится вниз параллельно самой себе на расстояние y . Независимо, что в действительности лестница так двигаться не может, ведь это перемещение воображаемое. В результате указанного перемещения потенциальная энергия лестницы и груза уменьшится на $(W + P)y$, а сила F_3 совершит работу $F_3 y$. Из закона сохранения энергии следует равенство этих двух величин, так что $(W + P)y = F_3 y$ и, следовательно, $F_3 = W + P = 36 \text{ кГ}$ (P — вес лестницы).



Выберем теперь другое виртуальное перемещение, состоящее в переносе лестницы параллельно себе в горизонтальном направлении, скажем, вправо, на расстояние x . Аналогично предыдущему случаю можно написать $F_1 x = F_2 x$, откуда $F_1 = F_2$. Чтобы найти численные значения этих сил, необходимо иметь еще одно уравнение. Его можно получить, записав закон сохранения энергии при виртуальном повороте лестницы на небольшой угол вокруг осн, проходящей через нижний конец лестницы. Пусть α — угол, который образует лестница с

Землей, а φ — тот малый угол, на который повернется лестница (по часовой стрелке). Точка, расположенная на расстоянии l от оси вращения, опишет дугу длиной $l\varphi$. Так как угол φ мал, можно считать, что стягивающая дугу хорда имеет ту же длину и образует угол α , но с вертикальной стенкой (т. е. хорда перпендикулярна лестнице). Поэтому рассматриваемая точка при виртуальном повороте сместится вверх на величину $l\varphi \cos \alpha$ и вправо — на $l\varphi \sin \alpha$.

Используя только что полученный результат, убеждаемся в том, что при повороте на малый угол φ потенциальная энергия лестницы с грузом увеличится на $(1/2)PL\varphi \cos \alpha + (3/4)WL\varphi \cos \alpha$, а сила F_1 совершит работу $F_1 l\varphi \sin \alpha$ (L — длина лестницы). Из закона сохранения энергии имеем

$$F_1 L \varphi \sin \alpha = \frac{1}{2} PL \varphi \cos \alpha + \frac{3}{4} WL \varphi \cos \alpha,$$

откуда

$$F_1 = \frac{(P/2 + 3W/4) L \cos \alpha}{L \sin \alpha}.$$

По условию задачи $L \cos \alpha = 1,8 \text{ м}$, $L \sin \alpha = 2,4 \text{ м}$, так что $F_1 = 18 \text{ кГ}$.

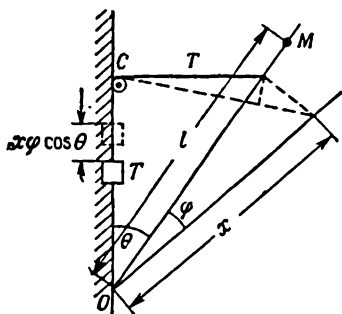
- 4.3. Уравновесим стержень подъемного устройства грузом T , подвешенным на малом блоке в точке C . При виртуальном повороте стержня по часовой стрелке на малый угол φ вокруг нижнего конца точка M стержня, расположенная на расстоянии l от оси вращения, опустится вниз на расстояние $l\varphi \sin \theta$ и сместится вправо на $l\varphi \cos \theta$ (см. предыдущую задачу). Поэтому при таком перемещении потенциальная энергия стержня и груза W уменьшится на $(W + w/2)L\varphi \sin \theta$, а

груз T , как видно из рисунка, поднимется на высоту $x\varphi \cos \theta$, т.е. его потенциальная энергия увеличится на $Tx\varphi \cos \theta$. Из закона сохранения энергии имеем

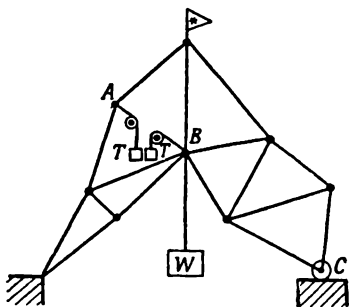
$$\left(W + \frac{w}{2}\right) L\varphi \sin \theta = Tx\varphi \cos \theta,$$

откуда

$$T = \frac{L}{x} \left(W + \frac{w}{2}\right) \operatorname{tg} \theta.$$



4.4. а) Представим себе, что стержень AB фермы удален. Тогда под действием груза W шарнир B пойдет вниз направо, а шарнир A — вверх налево. Ясно поэтому, что стержень AB был растянут. Однако и удалив стержень, мы тоже можем удержать ферму в равновесии, подвесив два равных груза на неподвижных блоках так, как это показано на рисунке. Если длина AB увеличивается, грузы поднимаются и их потенциальная энергия возрастает. Чтобы потенциальная энергия всей системы оставалась неизменной, груз W должен опуститься. Следовательно, при нагревании стержня AB груз W опускается.



б) Вес рассматриваемых нами грузиков равен силе растяжения стержня T (ферма находится в равновесии). Если увеличить длину AB на величину x , грузы поднимутся вверх, причем сумма изменений высот грузов также равна x , а груз W опустится на y . Поэтому $Tx = Wy$, т. е. $T = (y/x)W$.

4.5. Пусть груз w опустится вниз на расстояние y . Потенциальная энергия груза при этом уменьшится на wy . Посмотрим, как изменится потенциальная энергия тележки весом W . Прежде всего заметим, что, когда груз w опускается на расстояние y , ось подвижного блока, на котором он висит, опускается на вдвое меньшее расстояние. Так как тележка связана с грузом при помощи двух подвижных блоков, она переместится вверх по наклонной плоскости на расстояние, в 4 раза меньшее, чем то, на которое опустится груз w , т.е. на величину $y/4$. По вертикали тележка поднимется на высоту $(y/4) \sin \theta$; следовательно, ее потенциальная энергия увеличится на $(1/4)Wy \sin \theta$. Из закона сохранения энергии имеем $(1/4)Wy \sin \theta = wy$, откуда $W = 4w/\sin \theta$.

4.6. Повернем катушку на угол φ против часовой стрелки вокруг ее оси. При этом центр тяжести катушки поднимется на $x = r\varphi$, а нитка, на которой подвешен груз W , смотается с катушки на длину $y = R\varphi$,

т. е. груз W опустится на расстояние $y - x$. Из закона сохранения энергии имеем $W(y - x) = wx$, откуда

$$W = \frac{x}{y - x} w = \frac{r}{R - r} w.$$

- 4.7. По условию задачи $F_1/F_2 = R$, где F_1 и F_2 — силы, которые необходимо приложить к цепи для перемещения груза W вверх и вниз соответственно. Используем принцип виртуальной работы для этих двух случаев.

Предположим сначала, что, выбирая верхнюю часть ведущей цепи ворота с силой F_1 , мы повернули верхний блок на полный оборот против часовой стрелки. Очевидно, при этом мы протянули n звеньев цепи, или же n/N м, поскольку длина одного звена цепи равна $1/N$ м. Посмотрим теперь, что происходит с грузом W . Правая часть цепи, на которой висит подвижный блок, поднялась на n звеньев, зато левая огустилась на $n - 1$ звено, так что груз W поднялся на высоту $[n - (n - 1)]/2N$ м. Если обозначить через X работу сил трения при одном обороте верхнего блока, то из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{n}{N} F_1 = X + \frac{W}{2N}.$$

Чтобы повернуть верхний блок на один оборот по часовой стрелке, необходимо протянуть $n - 1$ звено [или $(n - 1)/N$ м] нижней части ведущей цепи ворота с силой F_2 . При этом груз W опустится на расстояние $[n - (n - 1)]/2N$ м. Так как по предположению сила трения не зависит от направления движения груза и поскольку каждый раз мы рассматриваем один полный оборот верхнего блока, работа сил трения в этом случае та же, что и в предыдущем, т. е. равна X . Согласно закону сохранения энергии,

$$X = \frac{n - 1}{N} F_2 + \frac{W}{2N}.$$

Таким образом, для неизвестных сил F_1 и F_2 и работы сил трения получаем следующую систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} F_1 &= X + \frac{W}{2N}, \\ \frac{n - 1}{N} F_2 &= X - \frac{W}{2N}, \\ \frac{F_1}{F_2} &= R. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$F_1 = \frac{WR}{n(R - 1) + 1}$$

и

$$F_2 = \frac{W}{n(R - 1) + 1}.$$

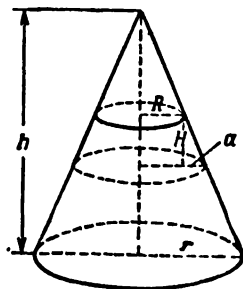
- 4.8. Выберем такое виртуальное перемещение цепи, при котором она опускается на малое расстояние H вниз по вертикали параллельно самой себе. Потенциальная энергия ее при этом уменьшится на WH . Радиус же цепи при таком перемещении увеличится на a . Легко сооб-

разить, что увеличение радиуса цепи и ее смещение вниз связаны соотношением $a/H = r/h$. Если натяжение цепи обозначить через T , то виртуальная работа сил натяжения при рассматриваемом виртуальном перемещении цепи равна

$$[2\pi(R+a) - 2\pi R] T = 2\pi a T$$

(R — радиус цепи). Но виртуальная работа силы T равна изменению потенциальной энергии цепи, т. е. $2\pi a T = \Delta W$. Отсюда следует

$$T = \frac{WH}{2\pi a} = \frac{Wh}{2\pi r}.$$



- 4.9. Повернем раму вокруг шарниров P и P' против часовой стрелки на небольшой угол φ . При таком повороте участок рамы $AA'CD$ опустится вниз параллельно самому себе на расстояние $AP \cdot \varphi$, а часть $BB'GH$ таким же образом поднимется вверх на высоту $PB \cdot \varphi$. Так как противовес w_c уравнивает раму в отсутствие грузов, изменение его потенциальной энергии при любом изменении положения рамы равно по величине изменению потенциальной энергии самой рамы. В силу закона сохранения энергии должны быть равными также изменения потенциальной энергии грузов W_1 и W_2 , т. е. $W_1 AP \cdot \varphi = W_2 BP \cdot \varphi$. Учитывая, что $AP = (1/2)BP$, находим $W_2 = (1/2)W_1 = 0,25 \text{ кг}$.

- 4.10. Очевидно, вниз будет двигаться груз по той наклонной плоскости, которая образует больший угол с горизонталью. Нетрудно убедиться в том, что, пройдя расстояние D вдоль наклонной плоскости, левый груз поднимется вверх на высоту $D \sin \theta$, а правый опустится вниз на расстояние $D \sin \varphi$. Грузы при этом будут двигаться с некоторой скоростью v . Из закона сохранения энергии изменение потенциальной энергии грузов равно их кинетической энергии (вначале грузы покоились). Поскольку кинетическая энергия каждого груза равна $Wv^2/2g$, а изменение потенциальной энергии грузов есть $WD(\sin \varphi - \sin \theta)$, получаем

$$2 \frac{Wv^2}{2g} = WD(\sin \varphi - \sin \theta),$$

откуда

$$v^2 = gD(\sin \varphi - \sin \theta).$$

- 4.11. Поскольку углы наклона плоскостей к горизонту одинаковы, грузы начнут двигаться так, что больший из них будет опускаться. При смещении на расстояние D потенциальная энергия грузов уменьшается на $(W_1 - W_2)D \sin \theta$ (см. предыдущую задачу), а их кинетическая энергия станет равной $(W_1 + W_2)v^2/2g$. Из закона сохранения энергии

$$\frac{W_1 + W_2}{2g} v^2 = (W_1 - W_2) D \sin \theta,$$

откуда

$$v^2 = 2g \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} D \sin \theta.$$

- 4.12. Пусть уровень воды в баке уменьшится на небольшую величину Δh . Это значит, что небольшая масса воды $\Delta m = \rho \Delta h \cdot A$ ($\Delta h \cdot A$ — объем вытекшей жидкости, а ρ — ее плотность) вытекла из сосуда через отверстие a с некоторой скоростью v . Так как площадь отверстия мала по сравнению с площадью поперечного сечения сосуда ($a \ll A$), скоростью изменения уровня жидкости в сосуде можно пренебречь. Изменение потенциальной энергии жидкости равно ΔmgH , а изменение ее кинетической энергии есть $\Delta mv^2/2$.

Из закона сохранения энергии имеем

$$\Delta mgH = \frac{\Delta mv^2}{2},$$

откуда $v = \sqrt{2gH}$. Таким образом, в принятом приближении скорость вытекания жидкости не зависит ни от площади поперечного сечения сосуда, ни от сечения отверстия, а только от высоты уровня жидкости над отверстием.

Учтем теперь скорость изменения уровня жидкости в сосуде, которую обозначим через v_1 . В этом случае изменение кинетической энергии жидкости равно

$$\frac{\Delta mv^2}{2} - \frac{\Delta mv_1^2}{2}$$

(а не $\Delta mv^2/2$, как мы считали раньше). Через поперечное сечение сосуда в единицу времени протекает жидкость объемом $v_1 A$, а через сечение a за то же время вытекает объем va . Поскольку жидкость практически несжимаема, эти объемы должны быть одинаковыми: $v_1 A = va$, откуда $v_1 = (a/A)v$.

Учитывая это, изменение кинетической энергии жидкости запишем как $(\Delta m/2)v^2[1 - (a/A)^2]$, а закон сохранения энергии в виде $(\Delta m/2)v^2[1 - (a/A)^2] = \Delta mgH$. Из последнего выражения находим скорость вытекания жидкости из сосуда:

$$v = \frac{\sqrt{2gH}}{1 - (a/A)^2}.$$

Таким образом, мы видим, что скорость вытекания жидкости из отверстия в баке не зависит от ее плотности. Это утверждение аналогично утверждению о том, что тела любой массы в поле тяжести падают с одним и тем же ускорением, т.е. в одни и те же моменты времени обладают равными скоростями.

- 4.13. I. Пусть стороны треугольника равны d_1 , d_2 и L , а угол между сторонами d_1 и d_2 равен α . Тогда, как известно, $L^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \alpha$. Увеличим угол α на небольшую величину $\Delta \alpha$. Сторона, лежащая против этого угла, станет равной L_1 , т.е. увеличится на небольшую величину $\Delta L = L_1 - L$. Но по той же теореме косинусов $L_1^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(\alpha + \Delta \alpha)$. Вспоминая, что $\cos(\alpha + \Delta \alpha) = \cos \alpha \cos \Delta \alpha - \sin \alpha \sin \Delta \alpha$ и что для малых углов $\cos \Delta \alpha \approx 1$, $\sin \Delta \alpha \approx \Delta \alpha$, находим

$$L_1^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2(\cos \alpha - \Delta \alpha \sin \alpha).$$

Вычитая L^2 из L_1^2 , получаем

$$L_1^2 - L^2 = 2d_1d_2 \Delta \alpha \sin \alpha.$$

С другой стороны,

$$L_1^2 - L^2 = (L_1 - L)(L_1 + L) = 2L \Delta L, (L_1 + L_2 \approx 2L).$$

Сравнивая эти выражения для разности квадратов сторон, получаем приведенную в условии задачи формулу

$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin \alpha \cdot \Delta \alpha.$$

II. Катеты a и b и гипотенуза c прямоугольного треугольника по теореме Пифагора связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$. Увеличим длины катетов на небольшие отрезки Δa и Δb , длина гипотенузы треугольника при этом также увеличится и станет равной $c + \Delta c$. Согласно теореме Пифагора $(c + \Delta c)^2 = (a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2$ или $c^2 + 2c\Delta c = a^2 + 2a\Delta a + 2b\Delta b + b^2$. Записывая последнее равенство, мы пренебрегли квадратами малых величин $(\Delta a)^2$, $(\Delta b)^2$ и $(\Delta c)^2$ по сравнению с членами типа a^2 и $a\Delta a$. Вычитая c^2 из $(c + \Delta c)^2$, находим

$$2c \Delta c = 2a \Delta a + 2b \Delta b.$$

Отсюда

$$c \Delta c = a \Delta a + b \Delta b.$$

- 4.14. Пронумеруем бревна, как показано на рисунке. Рассмотрим такое виртуальное перемещение бревен, при котором бревно 3 смещается вверх по кузову, в результате чего бревно 2 проваливается между бревнами 1 и 3. Пусть центр бревна 3 сместился на небольшое расстояние $BB' = \Delta x$. Центр бревна 2 при этом займет положение C' , причем можно считать, что бревно 2 сначала перемещается перпендикулярно кузову на расстояние $CK = \Delta y$, а затем вправо параллельно кузову на расстояние $KC' = LL' = (AB' - AB)/2 = \Delta x/2$. При таких перемещениях центр бревна 3 поднимется вверх на расстояние $\Delta h_3 = \Delta x \sin \theta$, а центр бревна 2 опустится вниз на величину $\Delta h_2 = \Delta y \cos \theta - (\Delta x/2) \sin \theta$. Но изменение потенциальной энергии бревен при таких перемещениях должно равняться нулю, откуда следует $\Delta h_2 = \Delta h_3$ (здесь учтено, что массы всех бревен одинаковы). Подставляя вместо Δh_2 и Δh_3 их значения, получаем

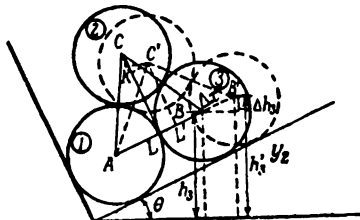
$$\Delta y \cos \theta - \frac{\Delta x}{2} \sin \theta = \Delta x \sin \theta,$$

или

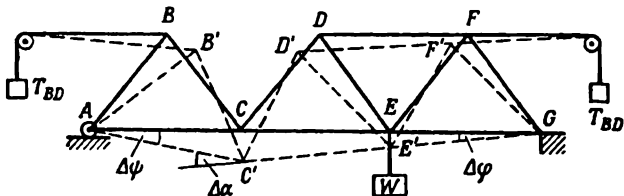
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{3} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Вычислим Δy . Из прямоугольных треугольников ACL и $AC'L'$ следует, что $CL = \sqrt{3} R$, а $C'L' = \sqrt{(2R)^2 - [R + (\Delta x/2)]^2} \approx \sqrt{3R^2 - R\Delta x} = \sqrt{3} R \sqrt{1 - (\Delta x/3R)} \approx \sqrt{3} R (1 - \Delta x/6R)$. При вычислении $C'L'$ мы пренебрегли, как и в предыдущей задаче, членами типа Δx^2 ; при извлечении корня квадратного мы использовали приближенную формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + (1/2)x$, справедливую при $x \ll 1$.

Таким образом, $\Delta y = CL - C'L' = \Delta x/2 \sqrt{3}$, а $\operatorname{tg} \theta = (1/3 \sqrt{3}) (\theta \approx 11^\circ)$.



- 4.15. а) Гибкими связями можно заменить те стержни, которые растянуты. Чтобы выяснить, сжат данный стержень или растянут, удобно воспользоваться следующим простым приемом. Представим, например, что стержень AB фермы удален. Тогда груз W пойдет вниз, а точка B начнет перемещаться к точке A . Стержень AB препятствует такому движению, следовательно, он сжат. Удалим стержень AC . Груз W снова начнет двигаться вниз, а шарниры A и C разведутся. Стало быть, стержень AC растянут. Удаляя последовательно каждый стержень фермы, можно убедиться, что стержни BC , AC , CE , EG , ED и EF растянуты, т. е. их можно заменить гибкими связями. Все остальные стержни сжаты.
- б) Удалим стержень BD . Чтобы ферма осталась в равновесии, к ней нужно на двух блоках подвесить два груза каждый весом T_{BD} ,



как показано на рисунке (T_{BD} — усилие в стержне BD). Рассмотрим следующее виртуальное перемещение. Представим себе, что ферма переломилась в шарнире C , в результате чего часть фермы $GFDCE$ повернулась как целое на небольшой угол $\Delta\varphi$ вокруг шарнира G , а часть ABC — на угол $\Delta\psi$ вокруг шарнира A . Углы $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ считаем очень малыми, чтобы можно было пренебречь смещением точки A .

При таком перемещении фермы груз W опустится вниз на расстояние $EE' = EG \cdot \Delta\varphi$, а подвешенные на блоках грузики поднимутся вверх. Как видно из рисунка, сумма высот подъема грузов равна $BD - B'D' = \Delta BD$. Чтобы найти эту величину, удобно воспользоваться формулой, доказанной в п. 1 задачи 4.13; для этого нужно лишь определить изменение угла BCD :

$$\Delta\alpha = \angle BCD - \angle B'C'D'.$$

Легко убедиться в том, что $\Delta\alpha = \Delta\varphi + \Delta\psi$. Но $CC' = CG\Delta\varphi = AC\Delta\psi$, так что $\Delta\psi = (CG/AC)\Delta\varphi = 2\Delta\varphi$, поэтому $\Delta\alpha = 3\Delta\varphi$.

Таким образом,

$$\Delta BD = \frac{(BC)^2}{BD} \sin(\angle BCD) \cdot \Delta\alpha = \frac{12}{5} BC \Delta\varphi,$$

поскольку $\sin(\angle BCD) = 24/25$. (Все стороны треугольника BCD известны, так что синус нетрудно вычислить.)

Из закона сохранения энергии имеем $T_{BD}\Delta BD = WEG\Delta\varphi$, откуда

$$T_{BD} = \frac{EG \cdot \Delta\varphi}{\Delta BD} W = \frac{1}{2} W.$$

- 4.16. Если стержень находится в равновесии, то, повернув его на малый угол $\Delta\varphi$ около точки P , мы должны обнаружить, что потенциальная энергия не изменилась. Это означает, что потенциальная энергия одного из кусков увеличивается, а другого уменьшается, в точности компенсируя это увеличение. Поскольку потенциальная энергия однородного стержня зависит от высоты его середины, нужно

определить, как изменятся высоты средин кусков при повороте на угол $\Delta\varphi$ (см. рисунок). Из рисунка видно, что (для удобства треугольники $BB'B''$ и $CC'C''$ нарисованы отдельно) середина куска весом $2W$ опустится на величину $B'B'' = BB' \sin \alpha_1$, а середина куска весом W поднимется на $C'C'' = CC' \sin \alpha_2$, где α_1 и α_2 — углы между линиями, соединяющими середины первого и второго кусков с точкой подвеса P , и вертикалью. Таким образом,

$$2WB'B' \sin \alpha_1 = WCC' \sin \alpha_2.$$

Но $BB' = CC'$ ($BB' = PB \cdot \Delta\varphi$, $CC' = PC \cdot \Delta\varphi$, а $PB = PC$), поэтому

$$2 \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2.$$

Заметим далее, что угол наклона α стержня к горизонтали равен углу, который образует перпендикуляр к стержню с вертикалью, и что $\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha$, а $\alpha_2 = \alpha_0 + \alpha$. Пользуясь формулами для синуса суммы и разности углов, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Определим $\operatorname{tg} \alpha_0$:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{CD}{PD} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \alpha \approx 5^\circ 30'.$$

- 4.17. Пусть в положении равновесия нить, соединяющая грузы W_1 и W_2 образует угол α с большим катетом; натяжение нити обозначим через T . Предположим, что груз W_2 сдвинулся на небольшое расстояние Δx_2 вниз по проволоке, а груз W_1 остался неподвижным. При таком виртуальном перемещении груз W_2 опустится по вертикали на расстояние $\Delta x_2 \cos 30^\circ$, а нить растянется на величину $\Delta l = \Delta x_2 \cos(90^\circ - \alpha)$. В силу принципа виртуальных перемещений

$$W_2 \Delta x_2 \cos 30^\circ = T \Delta x_2 \cos(90^\circ - \alpha),$$

или

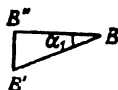
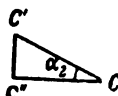
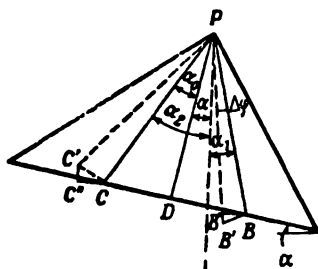
$$\frac{\sqrt{3}}{2} W_2 = T \sin \alpha.$$

Сместим теперь вниз по проволоке груз весом W_1 на расстояние Δx_1 , а второй оставим неподвижным. Те же рассуждения приведут нас к уравнению

$$W_1 \Delta x_1 \cos 60^\circ = T \Delta x_1 \cos \alpha,$$

откуда

$$\frac{1}{2} W_1 = T \cos \alpha.$$

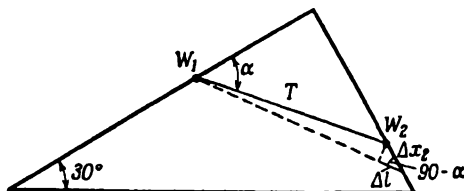


Решая полученные два уравнения для α и T , нетрудно найти

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \frac{W_2}{W_1} = 3 \sqrt{3}$$

(т. е. $\alpha \approx 79^\circ$), а сама сила натяжения нити

$$T = \sqrt{W_1^2 + W_2^2} = 265 \text{ Г.}$$



К главе 6. Вероятность

6.1. Как было показано в § 3 гл. 6 «Лекций» (вып. 1), при случайных блужданиях молекула, сделав N «шагов», отклонится от первоначального положения в среднем на расстояние $D = \sqrt{N} l$, где l — длина одного шага (в нашем случае это просто длина свободного пробега молекулы). Заметим, что используемая нами формула для пройденного расстояния (среднего квадратичного отклонения) отличается от формулы (6.10) «Лекций» (вып. 1, стр. 113) тем, что в ней явно фигурирует длина одного шага (в «Лекциях» же длина шага принята равной единице и поэтому явно в формулу не входит).

Итак, чтобы удалиться на расстоянии D , молекула должна сделать $N = D^2/l^2$ шагов. Каждый шаг совершается за промежуток времени $\tau = l/\langle v \rangle$ ($\langle v \rangle$ — средняя скорость молекулы), т. е. за время между двумя последовательными столкновениями молекулы. Поэтому для преодоления расстояния l см молекуле понадобится время

$$T = N\tau = \frac{D^2}{l\langle v \rangle} \approx 3 \text{ сек.}$$

6.2. Число существенно различных способов, которыми можно вынуть 3 шарика из 6, равно $C_6^3 = 20$. Из всех этих способов только одним способом можно вынуть все три шарика одного цвета (нужно, чтобы все шарики были красными) и, как легко подсчитать, шестью способами — шарики разного цвета (три возможности — белый шарик, первый зеленый шарик, один из трех красных; другие три способа — белый шарик, второй зеленый шарик и один из трех красных шариков). Иными словами, это число есть не что иное, как произведение $C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, так как из определенного количества шариков разного цвета (1, 2 и 3 соответственно) нам нужно выбрать по одному каждого цвета. Вероятность же некоторого события есть отношение числа благоприятствующих данному событию исходов к полному числу исходов (испытаний). Поэтому вероятность того, что все шарики окажутся одного цвета, равна $1/20$; вероятность же того, что все три шарика окажутся разного цвета, равна $6/20 = 3/10$.

6.3. Обозначим через p расстояние от центра шарика до оси, проходящей через центр неподвижной сферы параллельно скорости шарика (так называемое *прицельное расстояние*). Как видно из рисунка, $p = (a + b) \sin \alpha$, где α — угол между направлением скорости шарика и радиусом сферы, проведенным в точку попадания шарика, т. е. угол падения. Введем угол рассеяния χ — угол между начальной и конечной скоростями шарика. Учитывая, что угол падения α равен углу отражения β , находим $\chi = \pi - 2\alpha$.

Итак, угол рассеяния целиком определяется углом падения, т. е. в конечном итоге *прицельным расстоянием*. Если посмотреть со стороны движущихся шариков, то точки попадания шариков с одним и тем же прицельным расстоянием образуют окружность радиусом p (см. фиг. 6 и в). Шарик с несколько меньшим прицельным расстоянием $p - \Delta p$ отклоняется на больший угол $\chi + \Delta\chi$. Очевидно, что все шарик, попавшие на заштрихованное кольцо, отклоняются на углы, лежащие между χ и $\chi + \Delta\chi$. Если Δp мало, то площадь этого кольца равна $2\pi p \Delta p$, а число шариков, попадающих на него в единицу времени, равно $n \cdot 2\pi p \Delta p$, где n — плотность падающего потока, т. е. число шариков, проходящих в единицу времени через единичную площадку, расположенную нормально к потоку. Естественно предположить, что поток шариков однороден, т. е. что плотность потока не зависит от p . Выразим теперь Δp через χ и $\Delta\chi$. Так как $\alpha = (\pi - \chi)/2$, то

$$\Delta p = (a + b) \left[\cos \left(\frac{\chi}{2} \right) - \cos \left(\frac{\chi + \Delta\chi}{2} \right) \right] = \frac{a + b}{2} \sin \left(\frac{\chi}{2} \right) \cdot \Delta\chi.$$

Мы учли здесь то обстоятельство, что при малых $\Delta\chi$ $\sin(\Delta\chi/2) \approx \Delta\chi/2$, а $\cos(\Delta\chi/2) \approx 1$. Таким образом, число частиц, рассеянных в единицу времени на углы от χ до $\chi + \Delta\chi$, равно

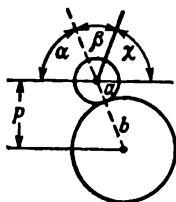
$$n\pi (a + b)^2 \sin \left(\frac{\chi}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\chi}{2} \right) \cdot \Delta\chi.$$

Если сечение потока шариков равно S , то доля шариков, рассеянных на углы от χ до $\chi + \Delta\chi$, равна

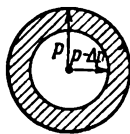
$$\frac{1}{S} \pi (a + b)^2 \sin \left(\frac{\chi}{2} \right) \cos \left(\frac{\chi}{2} \right) \cdot \Delta\chi = \frac{1}{S} \Delta\sigma(\chi, \Delta\chi).$$

Величину $\Delta\sigma$ называют *сечением рассеяния*. Имеем

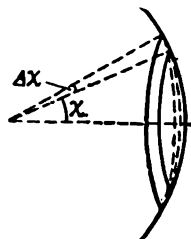
$$\Delta\sigma(\chi, \Delta\chi) = \frac{\pi (a + b)^2}{2} \sin \chi \cdot \Delta\chi.$$



a



б



Эту формулу полезно записать в несколько ином виде. Представим себе сферу единичного радиуса и отложим из центра этой сферы векторы, изображающие скорости рассеянных шариков. Тогда векторы,

отвечающие шарикам, рассеянным в интервале углов от χ до $\chi + \Delta\chi$, «пронижут» нашу сферу по кольцу, показанному на рисунке. Средний радиус этого кольца приблизительно равен $\sin \chi$, а площадь (для малых $\Delta\chi$) $2\pi \sin \chi \cdot \Delta\chi$. Обозначив эту площадь через $\Delta\Omega$, запишем

$$\Delta\sigma(\Delta\Omega) = \frac{(a+b)^2}{4} \Delta\Omega.$$

Наш результат можно выразить словами: сечение рассеяния в направлениях, лежащих в некотором телесном угле, пропорционально величине этого угла. Заметим, что полное сечение рассеяния σ на все углы ($\Omega = 4\pi$) равно $\pi(a+b)^2$, что вполне естественно: шарики рассеиваются сферой только в том случае, когда $p \leq a+b$.

К главе 7. Теория тяготения

7.1. Элементы орбиты Луны приведены в условии задачи. Для спутника же расстояния от центра Земли в перигее и апогее равны соответственно

$$r_c^p = R_3 + 225 \text{ км} = 6\,603 \text{ км},$$

$$r_c^a = R_3 + 710 \text{ км} = 7\,088 \text{ км}$$

($R_3 = 6378$ км — радиус Земли).

Для определения периода спутника T_c воспользуемся третьим законом Кеплера: $T_c^2/T_L^2 = a_c^3/a_L^3$, где a_c и a_L — большие полуоси орбит спутника и Луны соответственно, а T_L — период обращения Луны.

Выразим длину большой полуоси орбиты через r^p и r^a , воспользовавшись для этого формулами, приведенными на стр. 17:

$$r^p = a - c, \quad r^a = a + c,$$

откуда

$$a = (r^p + r^a)/2.$$

Подставляя a в формулу для отношения периодов, находим

$$T_c^2 = \left(\frac{r_c^p + r_c^a}{r_L^p + r_L^a} \right)^3 T_L^2.$$

В нашем случае это дает $T_c = 1,55$ час.

7.2. а) Так как спутник движется по круговой орбите радиусом R , то, сместившись на x в горизонтальном направлении, он одновременно переместится на расстояние s по вертикали. Выпишем формулу, связывающую s и x (см. «Лекции», вып. 1, подпись к рис. 7.4, стр. 129):

$$\frac{x}{s} = \frac{2R - s}{x} \approx \frac{2R}{x}$$

(s считаем малым, т.е. считаем, что прошло очень небольшое время с того момента, как спутник побывал в точке A). Таким образом,

$$s = \frac{x^2}{2R}.$$

Длина дуги AB равна vt (v — скорость спутника). Но если эта длина мала, то можно считать, что и $x \approx vt$; следовательно,

$$s = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

С другой стороны, формула пути для равноускоренного движения имеет вид: $s = at^2/2$. Сравнивая эти две формулы, видим, что центростремительное ускорение спутника $a_c = v^2/R$.

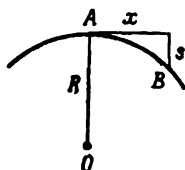
- б) Если положить $a = GM/R^2$, то

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \quad \text{и} \quad v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Период обращения есть время, за которое тело совершает один оборот, так что $T = 2\pi R/v$, или

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2} = \frac{4\pi^2}{GM} R^3.$$

Найденное выражение для T соответствует третьему закону Кеплера: квадрат периода пропорционален кубу большой полуоси орбиты (в нашем случае круговой орбиты — ее радиусу) (см. § 2 гл. 7 «Лекций», вып. 1, стр. 125).



- 7.3. а) Будем считать, что Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом $R_{\text{Л}} = 380\,000$ км с периодом $T_{\text{Л}} = 27,3$ суток, а Земля вращается вокруг Солнца по такой же орбите с параметрами $R_3 = 149\,500\,000$ км; $T_3 = 365,25$ суток.

Воспользуемся формулой для периода обращения спутника, полученной в предыдущей задаче:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3.$$

Записав периоды обращения Луны и Земли и взяв их отношение, получим

$$\frac{T_{\text{Л}}^2}{T_3^2} = \frac{R_{\text{Л}}^3}{R_3^3} \frac{M_{\text{С}}}{M_3},$$

где $M_{\text{С}}$ и M_3 — масса Солнца и Земли соответственно, откуда

$$\frac{M_{\text{С}}}{M_3} = \frac{T_{\text{Л}}^2}{T_3^2} \frac{R_3^3}{R_{\text{Л}}^3} = 3,3 \cdot 10^5.$$

- б) Рассмотрев аналогично движение Луны вокруг Земли и спутника Ио вокруг Юпитера, получим

$$\frac{M_{\text{Ю}}}{M_3} = \left(\frac{T_{\text{Л}}}{T_{\text{Ио}}} \right)^2 \left(\frac{R_{\text{Ио}}}{R_{\text{Л}}} \right)^3 = 318;$$

здесь $M_{\text{Ю}}$ — масса Юпитера, а $T_{\text{Ю}}$ и $R_{\text{Ю}}$ — период обращения и радиус орбиты спутника Юпитера Ио.

7.4. Пусть массы M_1 и M_2 вращаются по круговым орбитам с радиусами r_1 и r_2 соответственно, причем $r_1 + r_2 = R$ (R — постоянное расстояние между массами). Вращаясь вокруг неподвижной точки (их общего центра масс), эти тела все время находятся на одной прямой, соединяющей данные массы и проходящей через неподвижную точку вращения. Поэтому периоды обращения обоих тел одинаковы и равны T .

Рассмотрим движение одного тела, например первого. Сила притяжения, действующая на него со стороны второго тела, равна

$$F^{(1)} = \frac{GM_1M_2}{R^2}.$$

Как было показано в задаче 7.2, под действием этой силы тело движется с центростремительным ускорением

$$\alpha_{\text{ц}}^{(1)} = \frac{v_1^2}{r_1}.$$

Учитывая, что период обращения $T = 2\pi r_1/v_1$ и что $F^{(1)} = M_1\alpha_{\text{ц}}^{(1)}$ (см. § 3 гл. 7 «Лекций», вып. 1), получаем

$$F^{(1)} = M_1 \frac{(2\pi)^2 r_1^2}{T^2 r_1} = G \frac{M_1 M_2}{R^2},$$

откуда

$$\frac{(2\pi)^2 r_1}{T^2} = \frac{GM_2}{R^2}.$$

Аналогично можем написать для второго тела:

$$\frac{(2\pi)^2 r_2}{T^2} = \frac{GM_1}{R^2}.$$

Складывая два последних выражения и учитывая, что $r_1 + r_2 = R$, находим

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Полученная формула показывает, что период обращения тел зависит только от расстояния между ними и их суммарной массы (а не массы каждого из тел или же отношения их масс).

Перейдем теперь к случаю эллиптических орбит. Речь идет в сущности о трех эллипсах: по эллипсам движутся оба тела (легкое — по большому, тяжелое — по малому), и, кроме того, относительное движение тел также происходит по эллипсу (см. «Лекции», вып. 1, гл. 7). Все три эллипса подобны друг другу, т. е. обладают одним и тем же эксцентриситетом. Если учесть также, что центр масс системы остается неподвижным (он лежит в общем фокусе орбит обоих тел), а расстояния от центра масс до тел обратно пропорциональны их массам, то мы приходим к выводу, что расположение тел и их орбит такое, как показано на рисунке.

Обозначим через v_1 и v_2 скорости тел M_1 и M_2 в тот момент времени, когда они находятся в апогее. Как видно из рисунка,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1 + c_1}{a_2 + c_2} = \frac{a_1(1+e)}{a_2(1+e)} = \frac{a_1}{a_2}$$

(индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к эллипсам, по которым движутся массы M_1 и M_2 соответственно).

Чтобы получить для эллиптических орбит те же выражения, что и для круговых, вспомним, что эллипс можно получить из окружности, если изменить масштаб вдоль одной из осей координат. Ускорение тела при движении его по окружности было вычислено в «Лекциях» (вып. 1, гл. 7, подпись к рисунку 7.4, стр. 129). Чтобы получить ускорение тела (например, M_1) в интересующем нас случае, представим себе, что его орбита получена из круговой увеличением масштаба в «вертикальном направлении» в a_1/b_1 раз. Величина x при этом не изменится, а s увеличится и станет равным $s_1 = (a_1/b_1)s$.

Подставив в соотношение $x^2 = 2Rs$ (справедливое для окружности) их значения после увеличения масштаба $x_1 = x$, $s_1 = (a_1/b_1)s$ и $R = b_1$ («горизонтальные» размеры не изменились, поэтому малая полуось эллипса равна радиусу исходной окружности), получим

$$x^2 = 2 \frac{b_1^2}{a_1} s_1.$$

Таким образом, радиус кривизны эллипса в точке пересечения с большой полуосью равен b_1^2/a_1 . Считая, что в течение очень малого промежутка времени первое тело движется по круговой орбите этого радиуса, можно написать

$$\frac{v_1^2 a_1}{b_1^2} = \frac{GM_2}{(a+c)^2} = \frac{GM_2}{a^2(1+e)^2}$$

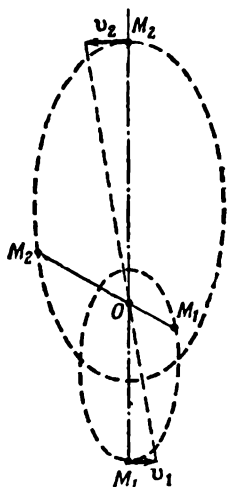
(здесь a и c — параметры орбиты относительного движения тел: $a = a_1 + a_2$, $c = c_1 + c_2$). Аналогично для второго тела:

$$\frac{v_2^2 a_2}{b_2^2} = \frac{GM_1}{a^2(1+e)^2}.$$

Складывая последние два равенства и выражая v_2 через v_1 , получаем

$$\frac{v_1^2(1+e)}{a_1^2(1-e)} = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}.$$

Остается лишь выяснить, какое отношение имеет к периоду обращения величина, стоящая в левой части этого равенства. Заметим прежде всего, что площадь которую за единицу времени «заменяет» радиус-вектор тела M_1 (проведенный из точки O), равна



$(1/2)v_1(a_1+c_1) = (1/2)v_1a_1(1+e)$. Хотя фактически мы вычислили скорость изменения «заметаемой» площади для того момента, когда тело M_1 находится в апогее, эта скорость, согласно второму закону Кеплера, не изменяется при движении тела по орбите. Поэтому величина $(1/2)v_1a_1(1+e)T$ (здесь T — период обращения) равна площади орбиты тела M_1 . Площадь эллипса легко вычислить, если сообразить, что при увеличении масштаба по одной из осей площадь фигуры увеличивается во столько же раз, что и масштаб. Поэтому площадь эллипса равна

$$\pi b_1^2 \frac{a_1}{b_1} = \pi a_1 b_1 = \pi a_1^2 \sqrt{1-e^2}.$$

Теперь нетрудно убедиться, что

$$T = \frac{2\pi a_1}{v_1} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \text{ а } T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

- 7.5. Как было показано в предыдущей задаче, квадрат периода обращения двух тел вокруг их центра масс дается выражением

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}$$

(здесь R — большая полуось относительного движения двух звезд).

Применяя эту формулу к движению двух звезд a и b и к системе Солнце — Земля, можно написать

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_a + M_b)} \text{ и } T_3^2 = \frac{(2\pi)^2 R_3^3}{G(M_C + M_3)}$$

(здесь R_3 и T_3 — большая полуось земной орбиты и период обращения Земли). Беря отношение этих периодов и пренебрегая массой Земли по сравнению с массой Солнца, получаем

$$\frac{M_a + M_b}{M_C} = \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2.$$

Но $T_3 = 1 \text{ год}$; $R_3 = 1 \text{ А. Е.}$ (по определению астрономической единицы длины), так что

$$\frac{M_a + M_b}{M_C} = \frac{R^3}{T^2}.$$

- 7.6. а) Предположим, что плоскость орбиты системы Сириуса перпендикулярна направлению на Землю. В этом случае из рис. 7.7 «Лекций» (вып. 1, стр. 132) можно определить величину большой полуоси орбиты Сириуса B (в угловых единицах). Она оказывается равной примерно $7,30''$. Из того же рисунка можно заключить, что период обращения системы около 45 лет.

В предыдущей задаче было показано, что при орбитальном движении различных тел можно установить соотношение

$$\frac{M_a + M_b}{M_C} = \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2$$

(обозначения те же, что и в задаче 7.5).

Отсюда суммарная масса двойной звезды Сирнуса равна

$$M_a + M_b = \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2 M_C \approx 3,7 M_C.$$

- б) Это значение массы есть ее нижний предел, так как если плоскость орбиты не перпендикулярна направлению на Землю, то ее большая полуось в действительности больше ее видимого с Земли размера. Масса двойной звезды пропорциональна кубу большой полуоси, так что минимальной величине полуоси соответствует минимальное же значение массы.

- 7.7. Орбитальная скорость планеты такова, что за равные промежутки времени τ ее радиус-вектор «заметает» равные площади (второй закон Кеплера). Рассмотрим движение Земли вблизи перигея и апогея за такие малые интервалы времени Δt , чтобы ее траекторию можно было считать прямолинейной. Тогда «заметаемые» площади представляют собой треугольники с основаниями $v_{\min} \Delta t$ и $v_{\max} \Delta t$ и высотами r_a и r_p соответственно, так что

$$(1/2) v_{\min} \Delta t \cdot r_a = (1/2) v_{\max} \Delta t \cdot r_p.$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{r_a}{r_p}.$$

Но для эллипса $r_a = a(1+e)$, а $r_p = a(1-e)$; следовательно, $\gamma = (1+e)/(1-e) \approx 1+2e$ (поскольку $e \ll 1$). Это дает $\gamma \approx 1,0334$.

- 7.8. а) По данным о появлении кометы находим ее период T обращения вокруг Солнца. Он равен $T \approx 76$ лет. Пользуясь третьим законом Кеплера найдем для большой полуоси a орбиты кометы:

$$\left(\frac{a}{a_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2 = 1,$$

где a_3 и T_3 — большая полуось орбиты и период обращения Земли.

Если измерять a в А.Е., а T в годах, то

$$a = T^{2/3} \approx 18 \text{ А.Е.}$$

Для расстояний в апогее и перигее имеем

$$r_a = a + c, \quad r_p = a - c,$$

что дает

$$r_a = 2a - r_p = 35,4 \text{ А.Е.}$$

- б) В предыдущей задаче было показано, что отношение максимальной и минимальной скоростей γ равно отношению расстояний в апогее и перигее. Таким образом,

$$\gamma = \frac{r_a}{r_p} = 59.$$

- 7.9. В задаче 7.4 было показано, что период обращения двух тел вокруг их общего центра масс равен

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)},$$

где R — расстояние между телами; M_1 и M_2 — их массы, а G — постоянная в законе тяготения.

Применив эту формулу к системе Земля — Луна, найдем массу Луны:

$$M_{\text{Л}} = \frac{(2\pi)^2 R_{\text{Л}}^3}{GT_{\text{Л}}^2} - M_{\text{З}}$$

($T_{\text{Л}}$ — период обращения Луны вокруг Земли, $M_{\text{З}}$ — масса Земли, $M_{\text{Л}}$ — масса Луны, $R_{\text{Л}}$ — расстояние от Земли до Луны).

Достижения современной ракетной техники дают нам еще один способ определения массы Луны. Запустим искусственный спутник Луны и определим его период обращения T и большую полуось его орбиты R . Тогда можно написать (см. задачу 7.2)

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GM_{\text{Л}}}, \text{ т. е. } M_{\text{Л}} = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GT^2}$$

(мы пренебрегли массой искусственного спутника по сравнению с массой Луны). Или, чтобы исключить G (см. задачу 7.3):

$$\frac{T^2}{T_{\text{Л}}^2} = \frac{R^3}{R_{\text{Л}}^3} \frac{M_{\text{З}}}{M_{\text{Л}}}, \text{ откуда } M_{\text{Л}} = \frac{R^3}{R_{\text{Л}}^3} \frac{T_{\text{Л}}^2}{T^2} M_{\text{З}}.$$

7.10. Тело массой m , расположенное на поверхности Земли, притягивается к ней с силой

$$F = G \frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2}.$$

Но $F = mg_{\text{З}}$, где $g_{\text{З}}$ — ускорение свободного падения на Земле. Приравнявая эти два выражения, получаем

$$mg_{\text{З}} = G \frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2} \text{ и } g_{\text{З}} = \frac{GM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2}.$$

Аналогично

$$g_{\text{Л}} = \frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}^2}$$

($M_{\text{Л}}$, $R_{\text{Л}}$, $g_{\text{Л}}$ — масса, радиус и ускорение свободного падения на Луне). Сравнивая $g_{\text{Л}}$ и $g_{\text{З}}$, находим

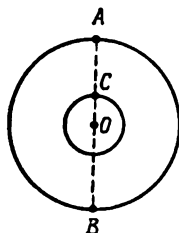
$$g_{\text{Л}} = \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \left(\frac{R_{\text{З}}}{R_{\text{Л}}} \right)^2 g_{\text{З}} \approx 1,67 \text{ м/сек}^2.$$

Иными словами, ускорение свободного падения на Луне примерно в 6 раз меньше, чем на Земле, поэтому и вес тел на Луне тоже в 6 раз меньше, чем на Земле.

- 7.11. Пусть лаборатория, где производится эксперимент, расположена в точке C Земли. На тела, находящиеся в лаборатории, действуют силы притяжения Земли и Луны, причем эти силы вычитаются, если Луна находится в точке A , и складываются, если Луна находится в точке B . Ускорение свободного падения для этих двух случаев равно

$$g_1 = \frac{GM_3}{R_3^2} - \frac{GM_L}{(R - R_3)^2},$$

$$g_2 = \frac{GM_3}{R_3^2} + \frac{GM_L}{(R + R_3)^2},$$



где R — расстояние от центра Земли до Луны.

Очевидно, что g_1 и g_2 — минимальное и максимальное значения ускорения g , которые оно принимает в течение суток.

Таким образом, самое большое изменение ускорения свободного падения тел за счет изменения положения Луны равно

$$\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{GM_L}{(R + R_3)^2} + \frac{GM_L}{(R - R_3)^2} \approx \frac{2GM_L}{R^2}$$

(мы учли, что $R_3 \ll R$).

Среднее ускорение свободного падения равно GM_3/R_3^2 . Таким образом,

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{M_L}{M_3} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 \approx 10^{-5}.$$

Следовательно, величину g нужно измерять с точностью не меньшей, чем до пятого знака, чтобы уловить ее «суточный ход» из-за наличия лунного притяжения.

К главе 8. Движение

- 8.1. Известно [формула (8.9) «Лекций», вып. 1, стр. 156], что ускорение есть производная скорости по времени: $a = dv/dt$. Стало быть, нужно подобрать такую функцию $v_x(t)$, чтобы ее производная была постоянной и равной a . Нетрудно убедиться в том, что $v_x(t) = at + c$, где c — некоторая постоянная величина (ее производная равна нулю!). Физический смысл постоянной легко выяснить, если положить $t = 0$ в формуле для $v_x(t)$. Тогда $c = v_x(0) \equiv v_{0x}$.

Вспомним теперь, что $v = dx/dt$, и подберем $x(t)$ так, чтобы получилась нужная производная.

Очевидно, $x(t) = at^2/2 + v_{0x}t + d$. Снова, полагая $t = 0$, убеждаемся, что здесь $d = x(0) = x_0$.

- 8.2. Из полученного в предыдущей задаче выражения для скорости находим $t = (v_x - v_{0x})/a$. Подставляя это выражение в формулу для x , получаем

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a(x - x_0).$$

8.3. Для движений вдоль осей x , y , z можно непосредственно написать

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} + a_x t, & x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \\v_y &= v_{0y} + a_y t, & y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \\v_z &= v_{0z} + a_z t, & z &= z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2.\end{aligned}$$

Последнее выражение в задаче 8.2 имеет вид ($a \equiv a_x$)

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0).$$

Обобщая его на случай движения вдоль осей y и z , имеем

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0),$$

$$v_z^2 = v_{0z}^2 + 2a_z(z - z_0).$$

Складывая равенства для всех трех компонент и учитывая формулу (8.16) «Лекций» (вып. 1, стр. 158), получаем

$$v^2 = v_0^2 + 2[a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, можно записать в компактной форме, если ввести скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{r})$ вектора ускорения $\mathbf{a}$ с компонентами a_x , a_y , a_z и вектора $\Delta \mathbf{r}$ с компонентами $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ (см. § 7 гл. 11 «Лекций», вып. 1). При этом выражение для квадрата скорости примет вид

$$v^2 = v_0^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{r})$$

8.4. Обозначим расстояние, которое пролетит снаряд по горизонтали, через S , а максимальную высоту его полета — через H . В начальный момент времени ($t = 0$) имеем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, а $v_{0x} = v \cos \theta$, $v_{0y} = v \sin \theta$. Используя результаты задачи 8.3, находим

$$x = v_{0x} t,$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

(здесь учтено, что $a_y = -g$).

Если из этих двух уравнений исключить время t , то получим уравнение траектории снаряда:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g x^2}{2 v_{0x}^2} = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2 v \cos^2 \theta}.$$

Кривая, задаваемая полученным уравнением, является параболой, обращенной вершиной вверх и проходящей через начало координат (при $x = 0$ получаем $y = 0$).

Очевидно, расстоянию S по оси x соответствует $y = 0$; отсюда можно найти момент падения снаряда на землю:

$$v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0,$$

что дает

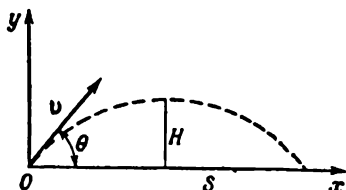
$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

Решению $t_1 = 0$ соответствует начальное положение $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
Значит,

$$S = v_{0x}t_2 = \frac{2v^2}{g} \cos \theta \sin \theta = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Из симметрии параболы следует, что максимальная высота достигается снарядом в момент времени $t' = t_2/2$, откуда

$$H = v_{0y}t' - \frac{1}{2}gt'^2 = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta.$$



8.5. $\theta = \pi/4 = 45^\circ$.

8.6. Запишем выражение для пройденного пути при ускоренном движении автомобиля: $s(t) = v_0t + at^2/2$, где v_0 — скорость автомобиля в начале ускоренного движения, a — его ускорение.

Учитывая, что к моменту времени $t_1 = 16$ сек автомобиль прошел путь $s_1 = 0,1$ мили, а к $t_2 = 16 + 8 = 24$ сек — путь $s_2 = 0,2$ мили, записываем два уравнения для a и v_0 :

$$0,1 = 16v_0 + \frac{1}{2}a(16)^2,$$

$$0,2 = 24v_0 + \frac{1}{2}a(24)^2.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$a = \frac{0,1}{192} \text{ миль/сек}^2 = 0,8 \text{ м/сек}^2,$$

$$v_0 = \frac{0,1}{48} \text{ миль/сек} = 3,3 \text{ м/сек}.$$

(1 сухопутная миля равна 1600 м.) Используя эти значения a и v_0 , находим скорость автомобиля в момент времени t_2 :

$$v_{t_2} = v_0 + at_2 = 22,5 \text{ м/сек} \approx 81 \text{ км/час}$$

8.7. а) В промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 50$ сек, т.е. во время работы двигателя, ракета двигалась с ускорением $2g$. Следовательно, в этом интервале времени скорость ракеты определяется формулой

$$v = 2gt.$$

Графиком этой зависимости является прямая (отрезок OA ; см. фиг. а), тангенс угла наклона которой к оси t определяется как

$$\frac{v_A}{t_A} = 2g.$$

С момента времени $t_1 = 50$ сек и дальше до падения на землю ракета движется с ускорением $-g$, так что

$$v = 100g - g(t - 50).$$

График этой функции — тоже прямая (справа от точки A), но модуль тангенса угла ее наклона к оси t равен g , т. е. в два раза меньше, чем для отрезка OA .

- б) Так как вертикальная скорость обращается в нуль в наивысшей точке траектории, моменту времени t_B соответствует максимальная высота полета ракеты. Таким образом,

$$H_{\text{макс}} = \frac{1}{2} 2gt_1^2 + 100g(t_B - 50) - \frac{1}{2} g(t_B - 50)^2 \approx 75\,000 \text{ м.}$$

Этот результат легко можно получить из графика функции $v(t)$. Как было показано в § 4 гл. 8 «Лекций» (вып. 1), пройденный телом путь есть $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v(t_i) \Delta t$. Какой смысл произведения

$v(t_i) \Delta t$? Это есть не что иное, как площадь прямоугольника с основанием Δt и высотой $v(t_i)$ (см. рис. б). Поэтому, если мы возьмем предел суммы площадей в интервале времен от t_1 до t_n , то получим площадь фигуры, ограниченной осью t , кривой $v(t)$ и двумя вертикалями, проведенными в точках t_1 и t_n . В нашем случае $H_{\text{макс}}$ есть площадь треугольника OAB , т. е.

$$H_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 1000 = 75\,000 \text{ м.}$$

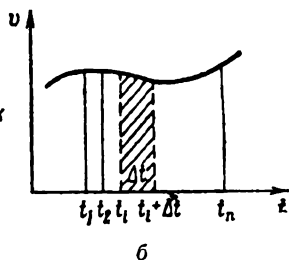
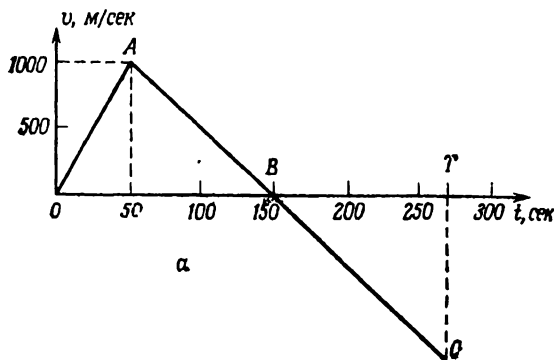
- в) С высоты $H_{\text{макс}}$ (с момента времени t_B) ракета свободно падает вниз. Поверхности Земли она достигает через t' сек, причём

$$t' = \sqrt{\frac{2H_{\text{макс}}}{g}} = 122,5 \text{ сек.}$$

Полное время движения ракеты

$$T = t_B + t' = 272,5 \text{ сек.}$$

Таким образом, график скорости заканчивается в точке C , соответствующей моменту T падения ракеты на Землю.



- 8.8. Обозначим ускорение тележки при движении с ракетным двигателем через a_1 , а с авиационным — через a_2 . Пусть $2S$ — проходимый тележкой путь в обоих случаях. Тележка с ракетным двигателем первую половину пути проходит за время t_1 , определяемое из уравнения

$$S = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \text{ т. е. } t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a_1}}.$$

Вторую половину пути она проходит за время t_2 :

$$S = v(t_1) t_2,$$

где $v(t_1)$ — скорость тележки в конце первой половины пути. т. е. $v(t_1) = a_1 t_1$, откуда

$$S = a_1 t_1 t_2 \text{ и } t_2 = \frac{S}{a_1 t_1} = \sqrt{\frac{S}{2a_1}}.$$

Тележка с реактивным двигателем проходит все расстояние за время t , такое, что

$$2S = \frac{1}{2} a_2 t^2, \text{ т. е. } t = \sqrt{\frac{4S}{a_2}}.$$

По условию задачи $t = t_1 + t_2$, так что

$$\sqrt{\frac{4S}{a_2}} = \sqrt{\frac{2S}{a_1}} + \sqrt{\frac{S}{2a_1}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{8} = 1,125.$$

- 8.9. Угол, под которым должна быть выпущена мина, чтобы пройти возле края обрыва, определим по формуле (см. задачу 8.4)

$$\sin 2\alpha = \frac{Sg}{v_0^2}.$$

Зная, что $S = 8100$ м, $v_0 = 300$ м/сек, получаем $\sin 2\alpha = 0,882$ и $\alpha_1 = 31^\circ$, $\alpha_2 = 59^\circ$. Очевидно, чем больше будет угол, под которым выпущена мина, тем ближе она упадет к основанию обрыва, поэтому в интересующем нас случае следует выбрать больший из углов, т. е. α_2 .

Рассмотрим теперь движение мины за краем обрыва. Скорость мины вблизи края обрыва направлена под углом $\alpha = 59^\circ$ к горизонту, но в отличие от начального положения ее вертикальная составляющая направлена не вверх, а вниз. Следовательно, до падения на землю мина пролетит по горизонтали расстояние $S_{\text{мин}} = v_0 t \cos \alpha$ (t — время движения за краем обрыва). Вычислим t . Поскольку вертикально вниз мина движется с начальной скоростью $v_0 \sin \alpha$ и ускорением g , то $h = v_0 t \sin \alpha + gt^2/2$ (h — высота обрыва). Подставляя вместо h , v_0 и α их численные значения, находим $t = 0,408$ сек, $S_{\text{мин}} \approx 63$ м.

- 8.10. а) Известно, что $\theta = S/R$. По определению $\sin \theta = AC/R$, а $\cos \theta = OC/R$. При малых углах θ дугу AB можно заменить перпендикуляром AC , а OC — радиусом R . В этом случае $\sin \theta \approx S/R = \theta$ и $\cos \theta \approx R/R = 1$.

Оценим погрешность, которую мы допускаем, полагая $\cos \theta \approx 1$.

$$\cos \theta = \frac{OC}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - AC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{AC}{R}\right)^2.$$

Но AC/R — малая величина порядка θ . Значит, мы пренебрегаем членами $\sim \theta^2$ по сравнению с 1. Поэтому говорят, что при малых углах приведенные нами формулы справедливы с точностью до членов первого порядка малости.

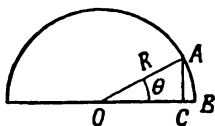
б) Вычисление производных $\sin x$ и $\cos x$ ясно из приводимых ниже формул:

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \cos x \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d \cos x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} = -\sin x. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что $\sin \Delta x \approx \Delta x$, а $\cos \Delta x \approx 1$.



8.11. а) Пусть тело в момент времени t окажется в точке $M(x, y)$ окружности. Обозначим через φ угол между радиусом, проведенным в эту точку, и положительным направлением оси x . Как видно из рисунка, координаты этой точки M записываются следующим образом.

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi.$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R \frac{d\varphi}{dt}.$$

Производную $d\varphi/dt$ (скорость изменения угла со временем) назовем угловой скоростью ω .

Таким образом, $v = \omega R$, или $\omega = v/R$. Поскольку v не зависит от времени, то и ω не зависит от времени, так что $\varphi = \omega t$. Вообще говоря, следовало бы написать $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, но по усло-

вию задачи $\varphi = 0$ при $t = 0$, т. е. $\varphi_0 = 0$. Следовательно,

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t,$$

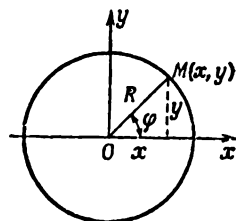
$$v_x = -R\omega \sin \omega t, \quad v_y = R\omega \cos \omega t$$

и

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t.$$

- б) Сравнивая выражения для x и $a_x = \ddot{x}$ и y и $a_y = \ddot{y}$, убеждаемся, что

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$



- 8.12. Координату x камешка удобно представить в виде суммы $x' + x''$, где x' — координата относительно оси колеса, а x'' — координата оси колеса (см. рисунок). Аналогично представляем и координату y . Выражения для x' и y' получены в предыдущей задаче (мы должны лишь заменить в соответствующих формулах ωt на $-\omega t$, поскольку если колесо катится в положительном направлении оси x , оно вращается по часовой стрелке, а в предыдущей задаче рассмотрено вращение против часовой стрелки). Таким образом,

$$x' = R \cos(-\omega t + \varphi_0),$$

$$y' = R \sin(-\omega t + \varphi_0).$$

В начальный момент времени $t = 0$ камешек касается земли, поэтому $\varphi_0 = -\pi/2$ (углы отсчитываются от оси x'), так что

$$x' = R \cos\left(-\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -R \sin \omega t,$$

$$y' = R \sin\left(-\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -R \cos \omega t.$$

Правильность этих соотношений можно проверить, подставив в них $t = 0$. Как и должно быть, получаем $x' = 0$ и $y' = -R$.

Центр колеса движется вдоль оси x с постоянной скоростью v , поэтому $x'' = vt$, а $x = vt - R \sin \omega t$. Найдём v_x -компоненту скорости камешка:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v - R\omega \cos \omega t.$$

В моменты соприкосновения с землей ($\omega t = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) скорость камешка должна быть равной нулю (по условию задачи проскальзывание отсутствует), поэтому

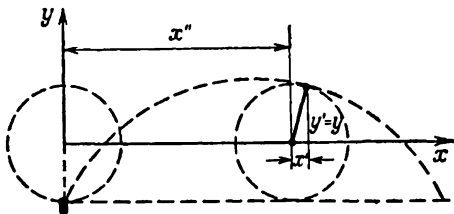
$$v - \omega R = 0, \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

В итоге получаем то, что называют кинематическими уравнениями движения:

$$x = vt - R \sin \frac{v}{R} t,$$

$$y = -R \cos \frac{v}{R} t.$$

Если исключить из этих уравнений время, то получим зависимость $y(x)$, которая изображается кривой, называемой циклоидой (см. рис.



сунок). Дифференцируя полученные выше выражения для x и y по времени, находим

$$v_x = v - v \cos \left(\frac{v}{R} t \right),$$

$$v_y = v \sin \left(\frac{v}{R} t \right)$$

и

$$a_x = \frac{v^2}{R} \sin \left(\frac{v}{R} t \right),$$

$$a_y = \frac{v^2}{R} \cos \left(\frac{v}{R} t \right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{R}.$$

К главе 9. Динамические законы Ньютона

9.1. Поскольку сила перпендикулярна скорости, то она не может изменить модуль скорости, а может лишь изменить ее направление. Так как модуль скорости постоянен, то постоянна и сама сила ($F = \beta v$). Эта сила вызывает ускорение (в направлении, перпендикулярном к v), величина которого определяется из соотношения $ma = \beta v$, т.е. $a = \beta v/m$.

В § 4 гл. 7 «Лекций» (вып. 1) рассматривалось такого рода движение с постоянной по величине скоростью и постоянным ускорением, перпендикулярным скорости. Было показано (см. задачу 7.2), что это есть движение по окружности с радиусом $R = v^2/a = mv/\beta$. Сама окружность расположена в плоскости xy , поскольку и скорость, и сила постоянно находятся в этой плоскости.

9.2. При вычислении радиусов кривизны воспользуемся формулой для ускорения, перпендикулярного скорости:

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{R}.$$

Далее.

$$a_{\perp} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, в дополнение к величинам, приведенным в табл. 9.2 «Лекций» (вып. 1, стр. 174), следует вычислить также величины dv/dt и $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Проведя указанные вычисления, находим для радиуса кривизны орбиты:

$$R = 0,664 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$R = 0,650 \quad \text{при} \quad t = 0,82,$$

$$R = 0,665 \quad \text{при} \quad t = 2,086.$$

- 9.3. а) Мяч влетел в окно горизонтально; это означает, что в этот момент времени он находился в наивысшей точке своей траектории. Максимальная же высота подъема определяется по формуле (см. задачу 8.4)

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\sin^2 \alpha}} = 14,5 \text{ м/сек.}$$

- б) В наивысшей точке скорость горизонтальна, а ускорение равно g (ускорение свободного падения) и направлено вертикально; следовательно, оно перпендикулярно скорости. Поэтому

$$g = \frac{v_x^2}{R} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{R},$$

откуда

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 2,46 \text{ м.}$$

Определим теперь радиус кривизны в произвольный момент времени t .

Обозначив через $a_{\perp}$ и $a_{\parallel}$ компоненты ускорения, перпендикулярную и параллельную скорости, запишем

$$a_{\perp} = \sqrt{g^2 - a_{\parallel}^2}.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + mgy \right) = 0,$$

т. е.

$$v \frac{dv}{dt} = -g \frac{dy}{dt} = -gv_y.$$

Вспоминая, что $a_{\parallel} = dv/dt$, находим

$$a_{\parallel} = -\frac{gv_y}{v}$$

и

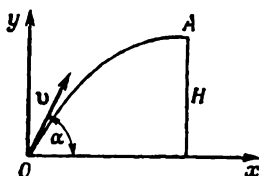
$$a_{\perp} = \frac{gv_x}{v}.$$

Так как $a_{\perp} = v^2/R$,

$$R = \frac{v^2}{a_{\perp}} = \frac{v^3}{gv_x}.$$

Далее, $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, поэтому в произвольный момент времени

$$R = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha)^{3/2}}{gv_0 \cos \alpha}.$$



- 9.4. Все величины в системе $M'K'C'A'$ будем обозначать буквой со штрихом. Без штриха будем обозначать те же величины в системе $MKCA$. Очевидно,

$$v' = \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau} \frac{dl}{dt} = \frac{\lambda}{\tau} v,$$

$$a' = \frac{d}{dt'} \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda d^2 l}{\tau^2 dt^2} = \frac{\lambda}{\tau^2} a,$$

$$E' = \frac{m' v'^2}{2} = \frac{1}{2} \mu m \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 v^2 = \mu \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 E,$$

$$F' = m' a' = \mu m \frac{\lambda}{\tau^2} a = \frac{\mu \lambda}{\tau^2} F,$$

$$(l' = \lambda l, \quad m' = \mu m, \quad t' = \tau t).$$

- 9.5. В системе единиц $M'K'C'A'$ сила тяготения запишется в виде

$$F' = G' \frac{M'_1 M'_2}{R'^2},$$

где G' — гравитационная постоянная. Следовательно,

$$G' = \frac{F' R'^2}{M'_1 M'_2} = \frac{\lambda^3}{\mu \tau^2} \frac{F R^2}{M_1 M_2} = \frac{\lambda^3}{\mu \tau^2} G.$$

[При получении этой формулы был использован результат предыдущей задачи: $F' = (\mu \lambda / \tau^2) F$.]

- 9.6. Заметим прежде всего, что величины $GM_{\odot}$ в произвольной штрихованной системе единиц и в системе МКСА связаны между собой соотношением

$$G'M'_{\odot} = \frac{\lambda^3}{\mu\tau^2} G\mu M_{\odot} = \frac{\lambda^3}{\tau^2} GM_{\odot}$$

(здесь λ и τ — коэффициенты, переводящие соответственно единицы длины и времени из системы МКС в штрихованную).

В системе МКС $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ ньютон $\cdot$ м²/кг², $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг, поэтому $GM_{\odot} = 13,34 \cdot 10^{19}$ м³/сек². Вычислим λ и τ .

За единицу длины в рассматриваемой системе единиц берется длина большой полуоси орбиты Земли, т.е. расстояние, равное $14,9 \cdot 10^9$ м. Следовательно, в А.Е. длина l' выражается через длину l как

$$l' = \frac{l}{14,9 \cdot 10^{10}} \quad (\text{т. е. } \lambda^{-1} = 14,9 \cdot 10^{10}).$$

Аналогично, $\tau^{-1} = 3,15 \cdot 10^7$ (число секунд в году). Таким образом,

$$G'M'_{\odot} = 3 \cdot 10^{-19} GM_{\odot} \approx 40 \text{ (А. Е.)}^3/(\text{лет})^2.$$

Величину $G'M'_{\odot}$ можно вычислить и другим способом, если вспомнить выражение для периода обращения планеты, полученное нами в задаче 7.4:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Применяя эту формулу для системы Солнце — Земля и пренебрегая массой Земли по сравнению с массой Солнца, получаем

$$GM_{\odot} = \frac{(2\pi)^2 R^3}{T^2}.$$

Но $R = 1$ А.Е., а $T = 1$ год, так что $G'M'_{\odot} = (2\pi)^2 \approx 40 \text{ (А. Е.)}^3/(\text{лет})^2$.

- 9.7. В модели Солнечной системы все расстояния измеряются числами, в k раз меньшими, чем в «натуральной» системе. Представим себе, что это изменение чисел произошло не вследствие реального уменьшения размеров системы, а в результате перехода к новой системе единиц, такой, что $l' = kl$. Но тогда и все единицы, размерность которых включает длину, также претерпят определенные изменения. В частности, плотность $\rho = m/l^3$ станет равной

$$\rho' = \frac{m'}{l'^3} = \frac{1}{k^3} \frac{m'}{l^3}.$$

По условию задачи $\rho' = \rho$. Это значит, что нужно взять новую единицу измерения не только для длины, но и для массы тела, причем, очевидно, $m' = k^3 m$.

Как было показано в задаче 7.4, период обращения T планеты вокруг Солнца выражается через суммарную массу M Солнца и планеты и большую полуось орбиты R , так что

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GM}.$$

В новой системе единиц

$$T'^2 = \frac{(2\pi)^2 R'^3}{G'M'} = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GM} = T^2.$$

Здесь мы использовали доказанное в предыдущей задаче соотношение

$$G'M' = \frac{k^3}{\tau^2} GM.$$

(Роль величины λ , фигурирующей в задаче 9.6, у нас играет k , а $\tau = 1$.) Таким образом, мы убеждаемся, что периоды обращения «планет» в изготовленной модели будут такими же, как и в реальной Солнечной системе.

- 9.8. Изменение потенциальной энергии при движении грузов равно изменению потенциальной энергии маленького грузика (насколько одна масса M опустится, настолько другая поднимется), т. е. $\Delta u = mgh$. Если тела в начальный момент покоились, то это изменение потенциальной энергии равно кинетической энергии всей системы в момент, когда подхватывается грузик:

$$mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} mv^2.$$

откуда

$$g = \frac{2M + m}{2mh} v^2.$$

- 9.9. Нагрузка N на подвес, а следовательно, и на мачту и гондолу при таком способе перевозки марсиан определяется равенством

$$N = T_1 + T$$

(T — натяжение нити, T_1 — нагрузка на ось неподвижного блока); T_1 равна сумме натяжений нити с одной и другой стороны неподвижного блока, т. е. $T_1 = 2T$, так что $N = 3T$.

Запишем уравнения движения обоих марсиан:

$$\frac{P}{g} a_2 = P - 2T,$$

$$\frac{F}{g} a_1 = F - T$$

(здесь g — ускорение свободного падения на Марсе). Так как веревка нерастяжима, то a_1 и a_2 связаны между собой. Очевидно, что при смещении оси подвижного блока вниз на x_2 груз F поднимется на расстояние $2x_2$, т. е. $x_1 = -2x_2$ (грузы смещаются в противоположные стороны). Дважды дифференцируя по времени это соотношение, называемое уравнением связи, получаем

$$a_1 = -2a_2.$$

Требуется решить уравнения движения совместно с полученным уравнением для ускорений.

После простых подстановок имеем

$$-\frac{P}{2g} a_1 = P - 2 \left(F - \frac{F}{g} a_1 \right) = P - 2F + \frac{2F}{g} a_1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{2F - P}{2F + P/2} g = \frac{4F - 2P}{4F + P} g.$$

Таким образом,

$$T = F - F \frac{4F - 2P}{4F + P} = \frac{3FP}{4F + P},$$

а нагрузка на гондолу

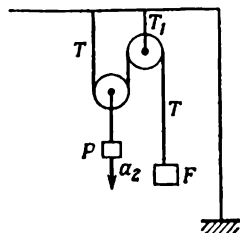
$$N = \frac{9FP}{4F + P}.$$

В нашем случае $P = 90$ кг и $F = 60$ кг, поэтому для N получаем 147 кг.

Выигрыш в нагрузке на гондолу равен

$$\Delta N = (F + P) - N = 3 \text{ кг}.$$

Гондольер Джузеппе мог бы получить значительно больший выигрыш в нагрузке, если бы поменял любимых местами. Нетрудно подсчитать, что в этом случае $N = 116$ кг, а $\Delta N = 34$ кг, т.е. выигрыш в нагрузке увеличился бы примерно в 11 раз по сравнению с предыдущим случаем. Правда, в этом случае Паоло будет двигаться вниз с ускорением, в три раза превышающим то, с каким двигалась Франческа при первом способе перевозки, так что Джузеппе придется изрядно поработать, чтобы успеть переправить молодых марсиан на противоположный берег канала.



- 9.10. Вес гири A на Луне меньше 1 кг, поэтому камень B на блоке перетянет гирю. Запишем уравнения движения:

$$m_B a = m_B g_L - T,$$

$$m_A a = -m_A g_L + T$$

(g_L — ускорение свободного падения на Луне, T — натяжение нити),
откуда

$$(m_B + m_A) a = (m_B - m_A) g_L.$$

Кроме того, известно, что камень B растягивает пружину на Луне так же, как гиря A растягивает ее на Земле. Это означает, что $m_A g = m_B g_L$, т.е. $g_L = (m_A/m_B)g$ (g — ускорение свободного падения на Земле).

Подставляя это значение g_L в выражение для a , после несложных преобразований получаем квадратное уравнение для m_B :

$$am_B^2 - m_A(g - a)m_B + m_A^2 g = 0.$$

Отсюда находим

$$m_B = 5,75 \text{ кг}.$$

Второе решение квадратного уравнения $m_B = 1,34 \text{ кг}$ отбрасываем, поскольку известно, что $g/g_L \approx 6$, поэтому должно быть и $m_B/m_A \approx 6$.

- 9.11. а) Чтобы найти ускорение лифта, запишем уравнение движения системы как целого:

$$(M_1 + M_2) a = F - (M_1 + M_2) g,$$

откуда

$$a = \frac{F}{M_1 + M_2} - g.$$

- б) На груз M_1 действуют две силы: натяжение нити и сила веса, причем $M_1 a = T - M_1 g$ (масса M_1 движется вверх с тем же ускорением a , что и лифт), т. е.

$$T = M_1 (a + g) = \frac{M_1}{M_1 + M_2} F.$$

- в) После обрыва нити на массу M_1 действует только сила тяжести, так что она движется вниз с ускорением g . Ускорение же лифта по-прежнему направлено вверх; величину его найдем из нового уравнения движения

$$M_2 a_2 = F - M_2 g,$$

т. е.

$$a_2 = \frac{F}{M_2} - g.$$

- г) Мы убедились, что тело M_1 движется вниз с ускорением g , а лифт поднимается вверх с ускорением a_2 . Значит, относительно лифта тело движется по направлению к полу с ускорением

$$a_1 = g + a_2 = \frac{F}{M_2}.$$

Путь S тело пройдет за время t , так что $S = a_1 t^2 / 2$, откуда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a_1}} = \sqrt{\frac{2SM_2}{F}}.$$

- 9.12. Обозначим массу маяра через M_1 , а массу кресла через M_2 . Запишем уравнения движения маяра и кресла:

$$M_1 a = T - M_1 g + P,$$

$$M_2 a = T - M_2 g - P;$$

здесь P — сила давления маяра на кресло.

Вычитая нижнее уравнение из верхнего, находим

$$a = \frac{2P - (M_1 - M_2)g}{M_1 - M_2} = \frac{1}{3}g.$$

Складывая затем уравнения движения, находим

$$2T = (M_1 + M_2)(a + g) = \frac{4}{3}(M_1 + M_2)g \approx 112 \text{ кг}.$$

Это и есть полная нагрузка на блок:

$$N = 2T = 112 \text{ кг}.$$

- 9.13. Если груз M_2 не опускается и не поднимается, то это означает, что его вес M_2g равен натяжению нити. Найдем ускорение груза M_1 :

$$M_1 a = T = M_2 g, \text{ т. е. } a = \frac{M_2}{M_1} g.$$

Определим теперь силу F . Так как M , M_1 и M_2 движутся как одно целое, то

$$F = (M + M_1 + M_2) a = \frac{(M + M_1 + M_2) M_2}{M_1} g.$$

- 9.14. Массы M и m движутся вправо как одно целое, поэтому $(M+m)a = 2T$, где a — ускорение горизонтального движения, а T — натяжение нити. Грузик m движется вертикально вниз с ускорением a_1 , уравнение его движения имеет вид

$$m a_1 = mg - T.$$

Из рисунка, приведенного в условии задачи, видно, что при смещении рамы вправо на расстояние x грузик m опустится вниз на расстояние $y = 2x$, что дает $a_1 = 2a$.

Таким образом,

$$(M + m) a = 2T \quad \text{или} \quad (M + m) a_1 = 4T.$$

Из двух уравнений движения находим

$$a_1 = \frac{4m}{M + 5m} g.$$

Время движения грузика

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{M + 5m}{2m} \frac{d}{g}} \approx 1 \text{ сек.}$$

К главе 10. Закон сохранения импульса

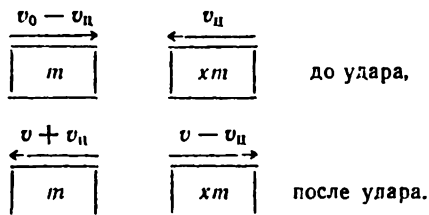
- 10.1. Пусть масса движущегося тела m , его скорость до соударения v_0 , а масса покоящегося тела xm (т. е. искомое отношение масс тел обозначено через x).

Рассмотрим сначала процесс столкновения двух тел не в неподвижной относительно Земли системе координат (будем называть ее лабораторной, или лаб. системой), а в системе центра масс (системе ц. м.):



В этой системе сумма импульсов тел равна нулю (т. е. в момент столкновения массы m и xm можно рассматривать как одно

покоящееся тело). Отсюда сразу вытекает, что скорости тел m и xm обратно пропорциональны массам. Так как процесс абсолютно упругий, величины скоростей тела до и после удара одинаковы. Система ц. м. движется относительно Земли (т.е. относительно лаб. системы) с некоторой скоростью $v_{ц}$. Процесс столкновения в лаб. системе изображен на схеме слева. Столкновение в системе ц. м. можно наблюдать, если, скажем, сесть в машину, движущуюся вправо со скоростью $v_{ц}$. При этом вид из машины будет такой:



Сравнивая эту картину с тем, что было сказано о столкновении в системе ц. м. ранее, получаем

$$v_1 = v_0 - v_{ц},$$

$$v_{ц} = \frac{1}{x} v_1,$$

$$v_1 = v + v_{ц}$$

и

$$\frac{1}{x} v_1 = v - v_{ц}.$$

Вычитая из третьего уравнения четвертое и деля получившееся выражение на второе уравнение, находим

$$\frac{v_1 - v_1/x}{v_1/x} = 2.$$

откуда $x = 3$.

- 10.2. Рассмотрим сначала случай, когда скорости сталкивающихся тел одинаковы и равны v . После столкновения тела разлетаются с меньшими скоростями $(v - \Delta v)$. Согласно условию,

$$\frac{(m/2) v^2 - (m/2) (v - \Delta v)^2}{(m/2) v^2} = f,$$

или

$$\frac{v^2 - (v - \Delta v)^2}{v^2} = f,$$

откуда

$$v - \Delta v = v \sqrt{1 - f} \approx v \left(1 - \frac{1}{2} f \right),$$

т. е.

$$\Delta v = \frac{vf}{2}.$$

Обратимся теперь к случаю, когда одно из тел покоится, а другое движется со скоростью v . Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $v/2$ в том же направлении, что и налетающее тело (в систему ц.м.). Тем самым мы свели задачу к предыдущей, с той лишь разницей, что скорости сталкивающихся тел теперь уже не v , а $v/2$. Соответственно

$$\Delta v = \frac{vf}{4},$$

т.е. после столкновения тела разлетаются со скоростями

$$\frac{v}{2} - \frac{vf}{4}.$$

Переходя в неподвижную систему координат, убеждаемся, что покоившееся прежде тело движется со скоростью

$$v - \frac{vf}{4} \approx v,$$

а налетевшее — с малой скоростью $vf/4$ в том же направлении, что и до столкновения.

- 10.3. Двигаясь по орбите, спутник в единицу времени сталкивается с молекулами воздуха, занимающими объем vS (v — скорость спутника, S — площадь его поперечного сечения). Масса этого объема воздуха $m_1 = \rho Sv$, где ρ — плотность воздуха.

Изменение количества движения спутника за этот же промежуток времени $\Delta p = m(v - v')$ равно, очевидно, изменению количества движения массы m_1 воздуха, т.е.

$$\Delta p = m_1 v = \rho S v^2.$$

(До столкновения средняя скорость молекулы воздуха относительно Земли равна нулю, после столкновения — скорости спутника v .)

Но изменение количества движения тела в единицу времени есть просто сила, действующая на тело. Таким образом, тормозящая сила $F_{\text{торм}} = \rho S v^2$, т.е. пропорциональна квадрату скорости спутника. Найдём ее величину.

Для стационарной орбиты

$$\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2},$$

откуда

$$v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

(M и R — масса и радиус Земли, G — постоянная тяготения).

Если тело находится на поверхности Земли, то, очевидно,

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \text{ и } GM = gR^2.$$

Подставляя это значение GM в выражение для скорости спутника, получаем

$$v^2 = \frac{gR^2}{R+h} \approx gR \left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

Здесь мы воспользовались приближенной формулой: $1/(1+x) \approx 1-x$ при $x \ll 1$. Таким образом,

$$F_{\text{торм}} = \rho_g S R \left(1 - \frac{h}{R}\right) \approx 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ ньютон}$$

($\rho = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3$, $S = 0,5 \text{ м}^2$, $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$, $h = 0,2 \cdot 10^6 \text{ м}$).

Как видно из формулы, связывающей высоту и скорость спутника, скорость спутника по мере уменьшения его высоты увеличивается. Может показаться странным, что действие силы торможения приводит к увеличению скорости. Однако дело состоит в том, что при наличии торможения скорость спутника уже не перпендикулярна направлению силы тяжести, т. е. появляется составляющая силы тяжести, изменяющая величину скорости спутника. Ускоряющее действие этой составляющей превосходит тормозящее действие силы торможения. (Подробнее об этом см. в решении задачи 14.18.)

- 10.4. а) Можно считать, что в самом начале движения масса ракеты остается все время постоянной и равной M_0 , т. е. можно пренебречь массой истекающих газов по сравнению с начальной массой ракеты. Кроме того, можно считать скорость газов относительно Земли постоянной и равной v_0 , так как скорость ракеты очень мала. Если вначале ракета покоилась, то количество движения ракеты вместе с топливом равно нулю. За время t из ракеты выбрасывается $r_0 t$ кг газа со скоростью v_0 , а сама ракета начинает двигаться со скоростью v в противоположном направлении. Из закона сохранения количества движения $v_0 r_0 t = M_0 v$ имеем $v = (v_0 r_0 / M_0) t$. Ускорение же ракеты равно

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 r_0}{M_0}.$$

- б) Силой тяги называется произведение массы ракеты на ускорение. Как было показано в п. (а), это ускорение равно $v_0 r_0 / M_0$, откуда $F = v_0 r_0$. Следовательно, расход топлива для создания необходимой силы тяги есть

$$r_0 = \frac{F}{v_0} = \frac{9,8 \cdot 10^5 \text{ ньютон}}{2 \cdot 10^3 \text{ м/сек}} = 490 \text{ кг/сек.}$$

Мы здесь рассматривали силу тяги и расход топлива только в начальный момент времени. Ниже будет показано, что при постоянной относительной скорости истечения газов v_0 сила тяги тоже постоянна, т. е. полученный результат справедлив в любой момент времени.

- в) Пусть M — масса ракеты, а v — ее скорость в произвольный момент времени t . За промежуток времени dt из ракеты будет выброшено $r_0 dt$ газов со скоростью (относительно Земли) $v - v_0$, в результате чего скорость ракеты возрастет на dv . Согласно закону сохранения количества движения,

$$Mv = (v - v_0) r_0 dt + (v + dv) (M - r_0 dt),$$

откуда следует

$$M \frac{dv}{dt} = r_0 v_0.$$

В левой части полученного уравнения стоит произведение массы ракеты в данный момент времени на ее ускорение dv/dt , следовательно, в правой части стоит сила F . Как видим, при постоянных r_0 и v_0 она также постоянна. Найдем теперь скорость ракеты в

произвольный момент времени. Учитывая, что $M(t) = M_0 - r_0 t$, находим

$$\frac{dv}{v_0} = \frac{r_0 dt}{M_0 - r_0 t}.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем зависимость скорости ракеты от времени:

$$\frac{v}{v_0} = -\ln(M_0 - r_0 t) + C.$$

Интеграл, стоящий в правой части, можно найти в математическом справочнике. Во всяком случае, пользуясь приближенной формулой $\ln(1+x) \approx x$ при $x \ll 1$, можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d \ln x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln[x(1 + \Delta x/x)] - \ln x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x/x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

После этого нетрудно убедиться, что производная $[-\ln(M_0 - r_0 t)]$ равна подынтегральной функции, так что интеграл вычислен правильно.

Постоянная C определяется из начальных условий. Если при $t = 0$ ракета покоилась, то $C = \ln M_0$. Поэтому

$$v = v_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - r_0 t} = v_0 \ln \frac{M_0}{M}.$$

- 10.5. Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $v_{ц.м.}$. В этой системе скорости тел с массами m_1 и m_2 будут соответственно $v_1 - v_{ц.м.}$ и $v_2 - v_{ц.м.}$. По определению системы ц.м.

$$m_1(v_1 - v_{ц.м.}) + m_2(v_2 - v_{ц.м.}) = 0,$$

откуда

$$v_{ц.м.} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

- 10.6. Пусть имеется n тел с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и скоростями $v_1, v_2, \dots, v_n$. В системе, движущейся со скоростью $v_{ц.м.}$, скорости тел соответственно равны $v_1 - v_{ц.м.}, v_2 - v_{ц.м.}, \dots, v_n - v_{ц.м.}$, а сумма их импульсов равна нулю:

$$m_1(v_1 - v_{ц.м.}) + m_2(v_2 - v_{ц.м.}) + \dots + m_n(v_n - v_{ц.м.}) = 0.$$

Собирая члены, содержащие $v_{ц.м.}$, и перенося их в правую часть, после несложных преобразований получаем

$$v_{ц.м.} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

- 10.7. Скорости тел в неподвижной (лабораторной) системе координат обозначим через v_1 и v_2 , а в системе центра масс v'_1 и v'_2 , причем $v'_1 = v_1 - v_{ц.м.}$ и $v'_2 = v_2 - v_{ц.м.}$. Кинетическая энергия этих тел в лаб. системе равна

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2_{ц.м.} + v_{ц.м.} (m_1 v'_1 + m_2 v'_2).$$

Сумма первых двух членов есть кинетическая энергия $T_{ц.м.}$ тел в системе ц.м., а коэффициент при $v_{ц.м.}$ равен сумме импульсов частиц в системе ц.м. и, следовательно, по определению системы ц.м. обращается в нуль. Таким образом,

$$T = T_{ц.м.} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2_{ц.м.}$$

- 10.8. В случае произвольного числа тел формула для кинетической энергии записывается в виде, аналогичном формуле, приведенной в решении задачи 10.7. По причине, указанной в решении задачи 10.7, коэффициент при $v_{ц.м.}$ равен нулю. Следовательно,

$$T = T_{ц.м.} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) v^2_{ц.м.} = T_{ц.м.} + \frac{1}{2} M v^2_{ц.м.}$$

где

$$T_{ц.м.} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v'^2_i,$$

а $M = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса всей системы.

- 10.9. Пусть скорость нейтрона до удара была v . Если масса нейтрона m , то масса ядра C^{12} равна примерно $12m$. Закон сохранения количества движения дает

$$mv = 12mv_2 - mv_1,$$

или

$$v_2 = \frac{v + v_1}{12}$$

(где v_1 — значение скорости нейтрона после столкновения, а v_2 — скорость ядра). Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (12m) v^2_2 + \frac{1}{2} m v^2_1.$$

Подставляя в это уравнение выражение для v_2 , находим

$$13v^2_1 + 2vv_1 - 11v^2 = 0,$$

откуда

$$v_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 11 \cdot 13v^2}}{13} = \frac{-v + 12v}{13} = \frac{11}{13} v.$$

Для v_1 мы выбираем положительное решение квадратного уравнения, так как заранее знаем, что нейтрон полетит назад. Направления же скоростей нейтрона и ядра после удара уже фактически учтены нами при записи закона сохранения импульса.

Для отношения кинетических энергий нейтрона до и после столкновения получаем

$$\frac{E'}{E} = \frac{(m/2) v_1^2}{(m/2) v_2^2} = \left(\frac{11}{13}\right)^2 \approx 0,72.$$

- 10.10. Найдем в первую очередь начальную скорость бруска v_1 . При этом можно воспользоваться законом сохранения импульса: пока брусок не отклонился, горизонтальные силы отсутствуют и поэтому импульс бруска с попавшей в него пулей равен начальному импульсу пули:

$$(M + m) v_1 = mv, \text{ откуда } v = \frac{M + m}{m} v_1.$$

В точке наивысшего подъема кинетическая энергия бруска и пули $(M + m)v_1^2/2$ переходит в потенциальную энергию $(M + m)gh$, где h — высота подъема бруска, поэтому $v_1^2 = 2gh$. Выразим h через x и L . Как видно из рисунка, треугольники AOC и $AA'B$ подобны и $h/x = x/2L$, т. е. $h = x^2/2L$.

Следовательно,

$$v_1^2 = \frac{x^2 g}{L}, \text{ а } v = \frac{M + m}{m} x \sqrt{\frac{g}{L}}.$$



К главе 11. Векторы

11.1. а) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

б) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,

в) $a_x = 3$,

г) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = 3$,

д) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3$,

е) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 9\mathbf{b} - 3\mathbf{c} = 15\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

- 11.2. а) Велосипедиста обдувают два потока воздуха: встречный, движущийся со скоростью его собственного движения v , и косой — со скоростью v_1 (см. нижнюю половину рисунка). Очевидно, что если ветер дует откуда-то с северо-востока, то скорость потока воздуха направлена куда-то на юго-запад. Естественно, велосипедист ощущает суммарный результат действия этих двух потоков, так что ему кажется, что ветер дует под углом α . Для неподвижного наблюдателя направление ветра составляет угол $\varphi = \alpha + \beta$ с направлением движения велосипедиста. Угол β найдем, принимая во внимание, что $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_1$, т. е. $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ образуют треугольник.

Для треугольника скоростей имеем

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin \beta}, \text{ откуда } \sin \beta = \frac{v}{v_1} \sin \alpha = 0,431,$$

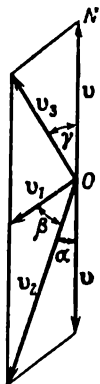
т. е.

$$\beta = 25^\circ 30'.$$

Таким образом,

$$\varphi = \alpha + \beta = 40^\circ 30'.$$

- б) Если велосипедист движется на юг, то угол γ между кажущимся направлением ветра и направлением движения велосипедиста (см. верхнюю часть рисунка) удовлетворяет соотношению



$$\frac{v_1}{\sin \gamma} = \frac{v}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)]} = \frac{v}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)},$$

откуда

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\sin \gamma \cos (\alpha + \beta) + \cos \gamma \sin (\alpha + \beta)}{\sin \gamma},$$

или

$$\operatorname{ctg} \gamma = \left[\frac{v}{v_1} - \cos (\alpha + \beta) \right] \frac{1}{\sin (\alpha + \beta)} = 1,39,$$

$$\text{т. е. } \gamma = 35^\circ 40'.$$

- 11.3. Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена строго на восток, а ось y — на север. Предположим далее, что второй корабль в начальный момент времени находится в начале координат O , а вектор его скорости v_2 образует угол α с осью OX . Очевидно, первый корабль находится в точке B , расположенной на оси y на расстоянии 6 миль от точки O , а его скорость направлена параллельно оси x .

В таком случае изменение координат кораблей со временем дается выражениями

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 t, & y_1 &= 6, \\ x_2 &= v_2 t \cos \alpha, & y_2 &= v_2 t \sin \alpha. \end{aligned}$$

Квадрат расстояния между двумя кораблями в произвольный момент времени равен

$$r^2 = (r_1 - r_2)^2 = (v_1 - v_2 \cos \alpha)^2 t^2 + (6 - v_2 t \sin \alpha)^2.$$

В условии задачи дано, что минимальное расстояние между кораблями равно 3 милям. Значит, r^2 как функция времени t имеет минимум при некотором значении времени $t = t_{\min}$. Но в этот момент времени производная от r^2 обращается в нуль:

$$\left. \frac{dr^2}{dt} \right|_{t=t_{\min}} = 0;$$

следовательно,

$$2(v_1 - v_2 \cos \alpha)^2 t_{\min} - 2(6 - v_2 t_{\min} \sin \alpha) v_2 \sin \alpha = 0,$$

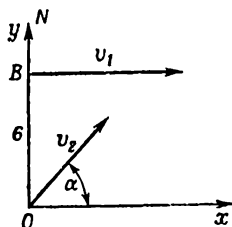
откуда

$$t_{\min} = \frac{6v_2 \sin \alpha}{v_1^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha + v_2^2}.$$

Наконец, подставляя вместо v_1 и v_2 их численные значения и учитывая, что $r^2(t_{\min}) = 9$, находим

$$6^2 - 26 \cos^2 \alpha - 27 \cdot 30 \cos \alpha = 0,$$

откуда $\cos \alpha_1 = 0$ ($\alpha_1 = 90^\circ$) и $\cos \alpha_2 = 0,866$ ($\alpha_2 = 30^\circ$). При меньшем значении угла $\alpha_2 = 30^\circ$ второй корабль пересечет курс первого (т.е. попадет на линию $y = 6$) в момент времени $t_2 = 6/v_2 \sin \alpha_2 = 6/13$ час. На восток при этом второй корабль уйдет на расстояние $S_2 = v_2 t_2 \cos \alpha_2 \approx 11,8$ миль, а первый — на расстояние $S_1 = v_1 t_2 \approx 7$ миль. Значит, второй корабль в рассматриваемом случае прошел бы перед носом первого корабля, и, следовательно, это значение угла должно быть исключено по условию задачи. Таким образом, второй корабль движется курсом строго на север. Он окажется на минимальном расстоянии от первого через $t_{\min} = 0,17$ час ≈ 10 мин от начального момента времени.



- 11.4. Можно считать, что произвольная точка M колеса участвует в двух движениях: равномерном со скоростью v вдоль оси x и вращательном вокруг центра колеса с угловой скоростью $\omega = v/R$ (см. задачу 8.12). Пусть в начальный момент времени $t = 0$ радиус-вектор точки M направлен под углом φ_0 к оси x . Действуя так же, как и в решении задачи 8.12, находим координаты x и y точки M в произвольный момент времени t :

$$x = vt + R \cos(\omega t - \varphi_0),$$

$$y = -R \sin(\omega t - \varphi_0).$$

Компоненты скорости точки M найдем, дифференцируя по времени выражения для координат:

$$v_x = v - R\omega \sin(\omega t - \varphi_0) = R\omega [1 - \sin(\omega t - \varphi_0)],$$

$$v_y = -R\omega \cos(\omega t - \varphi_0).$$

Вектор скорости есть

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}.$$

Будем считать, что в момент времени t точка M занимает положение, указанное на рисунке, а колесо соприкасается с горизонтальной поверхностью в точке A . Очевидно,

$$\mathbf{r}_M = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{а} \quad \mathbf{r}_A = v\mathbf{i} - R\mathbf{j}.$$

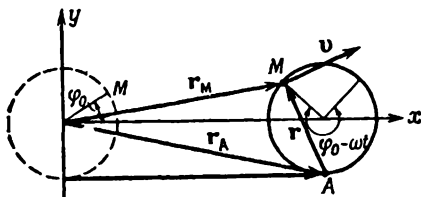
Проведем вектор $\mathbf{r}$ из точки касания A в точку M . Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A = R \cos(\omega t - \varphi_0) \mathbf{i} + R [1 - \sin(\omega t - \varphi_0)] \mathbf{j}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что скалярное произведение $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ (т. е. скорость точки M направлена перпендикулярно вектору $\mathbf{r}$), а

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \omega r.$$

Положение точки на ободе колеса определяется выбором угла φ_0 , а его конкретное значение при вычислениях мы нигде не использовали (ср. с задачей 8.12), следовательно, точка M произвольна. Но в таком случае полученный результат означает, что движение колеса в любой момент времени эквивалентно «чистому» вращению колеса с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку соприкосновения колеса с горизонтальной плоскостью в тот же момент времени.



- 11.5. При движении против течения реки скорость лодки равна $v - u$, а по течению $v + u$. Поэтому время t_V равно

$$t_V = \frac{d}{v - u} + \frac{d}{v + u} = \frac{2vd}{v^2 - u^2}.$$

При движении поперек реки скорость лодки должна быть направлена под некоторым углом α к направлению на противоположный берег (иначе лодка не попадет в нужную точку). Как видно из рисунка, скорость лодки поперек реки $v' = \sqrt{v^2 - u^2}$; следовательно, время движения в поперечном направлении

$$t_A = \frac{2d}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Наконец, по озеру расстояние $2d$ лодка пройдет за время $t_L = 2d/v$. Таким образом,

$$\frac{t_V}{t_A} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - u^2}} \quad \text{и} \quad \frac{t_A}{t_L} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - u^2}},$$

т. е.

$$\frac{t_V}{t_A} = \frac{t_A}{t_L}.$$

- 11.6. Обозначим скорость плывущего человека буквой v , скорость реки через u , а скорость идущего человека через v_1 . Чтобы попасть на противоположный берег в точку B , плывя под некоторым углом к течению, человеку потребуется время (см. решение предыдущей задачи)

$$t_1 = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Если же он будет плыть перпендикулярно течению, то на противоположный берег он попадет за время $t'_2 = d/v$, но течением его снесет в точку C , которая находится ниже точки B на расстоянии $BC = ut'_2$.

Пешком это расстояние человек пройдет за время

$$t''_2 = \frac{BC}{v_1} = \frac{u}{v_1} t'_2,$$

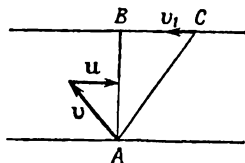
поэтому полное время движения человека вторым способом равно

$$t_2 = t'_2 + t''_2 = \left(1 + \frac{u}{v_1}\right) \frac{d}{v}.$$

Следовательно,

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1 v}{(u + v_1) \sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Подставляя сюда значения скоростей, убеждаемся, что $t_1/t_2 > 1$.

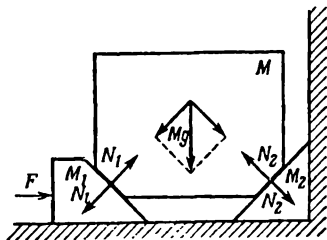


- 11.7. Запишем сначала уравнение движения для клина M_1 . На этот клин действуют две силы: сила F и сила давления N_1 со стороны груза M , горизонтальная проекция которой равна $N_1/\sqrt{2}$ и направлена против движения (фиг. 1). Итак,

$$M_1 a_1 = F - \frac{1}{\sqrt{2}} N_1.$$

Обратимся теперь к грузу M . Он скользит вверх по поверхности клина M_2 (т. е. под углом 45° к горизонту), и поэтому в уравнение движения груза входят лишь силы, действующие вдоль этого направления. Таких сил две: N_1 и проекция силы тяжести $Mg/\sqrt{2}$. Имеем

$$Ma = N_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} Mg.$$

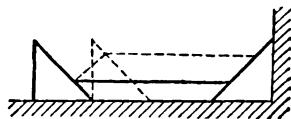


Фиг. 1.

Найдем теперь связь между a и a_1 . Как видно из фиг. 2, смещение груза M (изображена лишь нижняя кромка этого груза) вдоль поверхности клина M_2 в $\sqrt{2}$ раз меньше смещения клина M_1 по горизонтали. Следовательно, $a = a_1/\sqrt{2}$. Полученные уравнения запишем в виде системы

$$M_1 a_1 = F - \frac{1}{\sqrt{2}} N_1,$$

$$Ma_1 = -Mg + \sqrt{2} N_1.$$



Фиг. 2

Умножая первое из этих уравнений на 2 и складывая правые и левые части, находим

$$a_1 = \frac{2F - Mg}{2M_1 + M} = 2g.$$

Имеем далее

$$a = \frac{a_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} g.$$

Нетрудно также найти силу N_2 ; поскольку отсутствует движение перпендикулярно поверхности M_2 ,

$$N_2 = \frac{Mg}{\sqrt{2}} \approx 272 \text{ кГ}.$$

Таким образом:

а) клин M_1 движется горизонтально с ускорением $2g$, направленным к неподвижной стенке;

б) груз M движется вверх вдоль неподвижного клина M_2 с ускорением $\sqrt{2} g$;

в) сила давления клина M_2 на груз M равна 272 кГ .

- 11.8. Пусть точка M движется по окружности радиусом R с постоянной скоростью v . Время одного оборота, т. е. период движения, $\tau = 2\pi R/v$. К точке M приложены две силы: сила тяжести mg , направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити T , направленная вверх по нити. Очевидно, центростремительная сила $F_{\text{ц}} = mg + T$; она направлена по радиусу горизонтальной окружности. Как видно из рисунка, модуль ее равен $F_{\text{ц}} = mg \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между нитью и вертикалью, т. е. вызываемое этой силой центростремительное ускорение равно по величине $g \operatorname{tg} \alpha$. С другой стороны, как известно, это ускорение равно v^2/R ; следовательно,

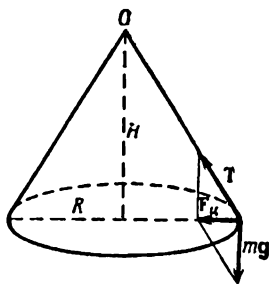
$$v^2/R = g \operatorname{tg} \alpha \text{ и } v^2 = gR \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом,

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H}.$$



- 11.9. а) Пусть имеется n тел с массами $m_1, \dots, m_n$ и скоростями $v_1, \dots, v_n$. В системе ц. м. эти скорости соответственно равны $v_1 - v_{\text{ц. м.}}, \dots, v_n - v_{\text{ц. м.}}$. По определению системы ц. м.

$$m_1(v_1 - v_{\text{ц. м.}}) + \dots + m_n(v_n - v_{\text{ц. м.}}) = 0,$$

откуда

$$v_{\text{ц. м.}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i.$$

- б) Обозначим через $v'_1, \dots, v'_n$ скорости тел в системе ц. м. Тогда $v_1 = v'_1 + v_{\text{ц. м.}}, \dots, v_n = v'_n + v_{\text{ц. м.}}$ представляют собой скорости

тел в неподвижной системе координат. Кинетическая энергия в этой системе

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v'_i + v_{ц.м.})^2 = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} v_{ц.м.}^2 \sum_{i=1}^n m_i + v_{ц.м.} \sum_{i=1}^n m_i v'_i.$$

Но

$$\sum_{i=1}^n m_i v'_i = 0, \text{ а величина } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 = T_{ц.м.}$$

есть кинетическая энергия тел в системе ц.м.; следовательно,

$$T = T_{ц.м.} + \frac{1}{2} M v_{ц.м.}^2 \quad \left(M = \sum_{i=1}^n m_i \right).$$

Таким образом, кинетическая энергия системы материальных точек в лабораторной системе координат равна ее кинетической энергии в системе ц.м. плюс кинетическая энергия центра масс, рассматриваемого как материальная точка массой M , движущаяся со скоростью $v_{ц.м.}$

11.10. Закон сохранения количества движения в векторной форме для данного случая имеет вид

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v},$$

отсюда

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = 2(j + k) \text{ м/сек.}$$

11.11. Кинетическая энергия частиц до столкновения равна

$$T_{ц.м.} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2,$$

где v'_1 и v'_2 — скорости первой и второй частиц в системе ц.м. Обратим внимание, что вычисленная нами в предыдущей задаче скорость $\mathbf{v}$ есть фактическая скорость центра масс $v_{ц.м.}$

Следовательно,

$$v'_1 = v_1 - v = 3i - 3k \text{ м/сек,}$$

$$v'_2 = v_2 - v = -2i + 2k \text{ м/сек,}$$

$$T_{ц.м.} = 30 \text{ Дж.}$$

11.12. Выберем систему координат, в которой ось y направлена на север, а ось x — на восток. В этой системе координат скорости первого тела до и после удара равны

$$v_1 = 6j \text{ м/сек, } u_1 = 2i + 2j \text{ м/сек.}$$

- а) Скорость u_2 более тяжелого тела после столкновения определим, пользуясь законом сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

откуда

$$u_2 = \frac{m_1 (v_1 - u_1)}{m_2} = -1 + 2j \text{ м/сек.}$$

Величина этой скорости

$$u_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ м/сек.}$$

- б) Учитывая, что

$$v_{ц.м} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2j \text{ м/сек.},$$

находим скорости тел до и после столкновения в системе ц. м.:

$$v'_1 = 4j \text{ м/сек.}, \quad u'_1 = 2i \text{ м/сек.},$$

$$v'_2 = -2j \text{ м/сек.}, \quad u'_2 = -1 \text{ м/сек.}$$

Кинетическая энергия до удара в системе ц. м. равна

$$T_{ц.м} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = 12 \text{ дж},$$

а после удара

$$T'_{ц.м} = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 = 3 \text{ дж.}$$

Таким образом, потеря энергии

$$\Delta T = T_{ц.м} - T'_{ц.м} = 9 \text{ дж},$$

и относительная потеря энергии $\Delta T/T = 3/4$.

- в) Согласно п. (б), более легкое тело в системе ц. м. имело скорость до удара $4j$, а после удара $2i$. Это значит, что до удара оно двигалось вдоль оси y , а после удара — вдоль оси x . Следовательно в системе ц. м. оно отклонилось на угол 90° (более точно — на угол -90°).

11.13. Пусть v скорость налетающей частицы. Найдем $v_{ц.м}$:

$$v_{ц.м} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}.$$

Начальные скорости частиц в системе ц. м. равны $v'_1 = v/2$ и $v'_2 = -v/2$.

После абсолютно упругого соударения скорости частиц в системе ц. м. остаются прежними по величине ($u'_1 = u'_2 = v/2$), но линия относительного движения поворачивается. Чтобы перейти к лаб. системе координат, нужно прибавить к векторам u'_1 и u'_2 вектор $v_{ц.м}$. Соответствующее построение приведено на рисунке. Так как $BC = AC = CD$, через точки A , B и D можно провести окружность с центром в точке C . Следовательно, угол BAD прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Этот же результат можно получить и с

помощью вычислений. Пусть вектор u'_1 образует угол α с осью x . Тогда

$$u'_1 = i \frac{v}{2} \cos \alpha + j \frac{v}{2} \sin \alpha,$$

а

$$u'_2 = -i \frac{v}{2} \cos \alpha - j \frac{v}{2} \sin \alpha$$

(u_2 образует угол $\pi + \alpha$ с осью x).

В лаб. системе

$$u_1 = i \frac{v}{2} \cos \alpha + j \frac{v}{2} (1 + \sin \alpha)$$

и

$$u_2 = -i \frac{v}{2} \cos \alpha + j \frac{v}{2} (1 - \sin \alpha).$$

Теперь легко убедиться, что $u_1 \cdot u_2 = 0$, откуда следует, что векторы u_1 и u_2 перпендикулярны друг другу.

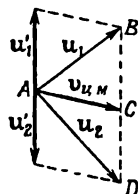
Приведем также другое решение, при котором не нужно переходить в систему ц. м. Из закона сохранения импульса имеем

$$v = u_1 + u_2.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$v^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 \cdot u_2$$

и вычтем из получившегося соотношения другое равенство, являющееся следствием закона сохранения энергии, а именно $v^2 = u_1^2 + u_2^2$; находим $u_1 \cdot u_2 = 0$, т. е. векторы u_1 и u_2 перпендикулярны друг другу.



- 11.14. Уравнение движения для обоих шариков одно и то же: $r = gk$, где r — радиус-вектор любого из шариков. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$r = c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} g t^2 k,$$

где c_1 и c_2 — некоторые, не зависящие от времени, векторы. Они-то как раз и будут разными для разных шариков. Легко найти, что c_1 равен радиусу-вектору частицы при $t = 0$, т. е. $c_1 = r(0)$, а c_2 — начальной скорости частицы $v(0)$.

Действительно, подставляя $t = 0$ непосредственно в общее решение, убеждаемся в справедливости первой части данного утверждения, а после подстановки этого же значения t в выражение для скорости $v(t) = \dot{r}(t) = c_2 + g t k$ — второй его части. Следовательно,

$$r_a(t) = 7(1+t)i + 3tj + 4,9(1+t^2)k \text{ м},$$

$$r_b(t) = 7(7-t)i + 3tj + 4,9(1+t^2)k \text{ м}.$$

- 11.15. Будем действовать по схеме, описанной в условии к задаче 11.13. Выберем ось x в направлении движения первой частицы, а ось y — перпендикулярно к ней вверх.

Очевидно, в лаб. системе скорости частиц равны

$$v_1 = v_1 i \quad v_2 = 0, \quad \text{а} \quad v_{ц.м.} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4} v_1 i.$$

Скорости частиц до соударения в системе ц. м.

$$v'_1 = \frac{3}{4} v_1 i, \quad v'_2 = -\frac{1}{4} v_1 i.$$

Поскольку соударение абсолютно упругое, в системе ц. м. скорости частиц по величине остаются прежними, но линия относительного движения поворачивается на некоторый угол.

Чтобы понять, на какой именно угол поворачивается эта линия, рассмотрим отдельно движение второй частицы в лаб. системе и в системе ц. м.

В системе ц. м. частица движется со скоростью $u'_2 = v_{ц.м.}$ вдоль оси x (см. рисунок в условии задачи, стр. 31). С той же по величине скоростью она движется и после столкновения, только под некоторым углом к оси x , т. е. $u'_2 = v_{ц.м.}$. В лаб. системе $u_2 = u'_2 + v_{ц.м.}$, причем угол между u_2 и осью x по условию задачи равен 45° . Таким образом, треугольник OAB равнобедренный с углами при основании, равными 45° ; следовательно, угол $OAB = 90^\circ$.

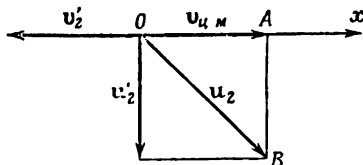
Итак, линия относительного движения в системе ц. м. повернулась на угол 90° . Это значит, что вектор u'_1 также направлен по оси y , но противоположно u'_2 :

$$u'_1 = \frac{3}{4} v_1 i.$$

В лаб. системе

$$u_1 = \frac{1}{4} v_1 i + \frac{3}{4} v_1 i.$$

так что



$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = 3,$$

т. е.

$$\theta_1 = 71^\circ 30'.$$

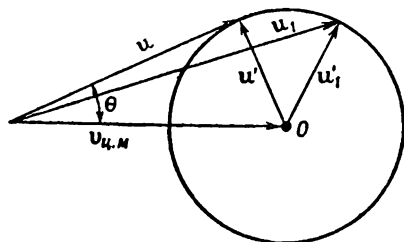
- 11.16. Пусть скорость тяжелой частицы до соударения v , а после соударения u . В системе ц. м. [$v_{ц.м.} = Mv/(M+m)$] эти скорости будут v' и u' , причем

$$u' = v' = \frac{M}{M+m} v.$$

Направление вектора u' может быть произвольным, так что конец этого вектора описывает окружность радиусом $Mv/(M+m) < v_{ц.м.}$

Поскольку $u = u' + v_{ц.м.}$, простым геометрическим построением легко найти различные значения вектора u , например u_1 . Как видно из рисунка, угол отклонения налетающей частицы (направление начальной скорости v совпадает с направлением $v_{ц.м.}$) максимален в том случае, когда вектор u направлен по касательной к окружности. При этом

$$\sin \theta = \frac{u'}{v_{ц.м.}} = \frac{m}{M}.$$



- 11.17. Выполним для частицы массой m такое же построение, как и в предыдущей задаче [только теперь $v_{ц.м.} = mv/(M+m)$, а $u' = Mv/(M+m)$, так что $u' > v_{ц.м.}$], с учетом того, что угол между $v_{ц.м.}$ и u равен 90° , определим $u' = u - v_{ц.м.}$. Построим теперь на этом же рисунке u_1 и u'_1 — скорости более тяжелой частицы в системе ц.м. и в исходной, причем, очевидно, скорость u'_1 направлена противоположно u' , а ее величина $u'_1 = v_{ц.м.} = mv/(M+m)$. С конца вектора $v_{ц.м.}$ параллельно AO проведем отрезок BD и определим его длину. Треугольники BDC и AOC подобны, поэтому

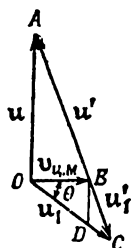
$$\frac{BD}{OA} = \frac{u'_1}{u' + u'_1} = \frac{m}{m+M}.$$

$$\text{Но } OA = \sqrt{u'^2 - v_{ц.м.}^2} = v \left[\sqrt{M^2 - m^2} / (M+m) \right] = v \sqrt{(M-m)/(M+m)}, \text{ так что}$$

$$BD = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} \cdot \frac{m}{M+m} v.$$

Наконец, вычисляем тангенс «угла отдачи» θ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{BD}{OB} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} = \sqrt{\frac{1-(m/M)}{1+(m/M)}}.$$



- 11.18. Задача решается так же, как и предыдущая, с тем лишь отличием, что скорости частиц после столкновения u' и u'_1 теперь уже не равны u' и u'_1 — их скоростям до столкновения. Скорости в системе ц.м. после соударения найдем из соотношения

$$\frac{1}{2} m u'^2 + \frac{1}{2} M u_1'^2 = \frac{1}{2} a^2 (m v'^2 + M v_1'^2),$$

которое вытекает из условия задачи $\Delta T/T = 1 - \alpha^2$. Учитывая, что $mu' = Mu'_1$ и $mv' = Mv'_1$, находим

$$u' = \alpha v', \quad u'_1 = \alpha v'_1$$

Следовательно, отношение BD/OA остается тем же, что и в предыдущей задаче, но длина OA меняется. В нашем случае

$$OA = v \sqrt{(\alpha^2 M^2 - m^2)} / (M + m).$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{\alpha^2 M^2 - m^2}}{M + m} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - (m/M)^2}{1 + (m/M)}}.$$

Если $\alpha = 1$ (абсолютно упругое соударение), этот результат переходит в результат предыдущей задачи. При уменьшении α уменьшается $\operatorname{tg} \theta$, а при $\alpha = (m/M)$ он обращается в нуль. Если $\alpha < m/M$, полученная нами формула теряет смысл. Это и понятно: при столь малых значениях α $u'_m < v_{ц.м.}$, поэтому рассеяние на прямой угол становится невозможным.

11.19. Если радиус-вектор частицы со временем меняется по закону

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\left(t + \frac{1}{2}t^2\right) - \mathbf{k}\frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ м},$$

то скорость частицы равна

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}(1 + t) - \mathbf{k}\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ м/сек},$$

а ускорение

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{j} + \mathbf{k}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ м/сек}^2.$$

а) В момент времени $t = 0$.

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{2}{\pi}\mathbf{k} \text{ м/сек},$$

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{j} \text{ м/сек}^2, \quad T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \text{ дж} \approx 1,2 \text{ дж}.$$

В момент времени $t = 1$

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - \frac{4}{\pi^2}\mathbf{k} \text{ м},$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ м/сек},$$

$$\mathbf{a}(1) = \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ м/сек}^2, \quad T = \frac{1}{2}(1 + 4) \text{ дж} = 2,5 \text{ дж}.$$

б) Силу, действующую на частицу, находим из уравнения движения

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}\sin\left(\frac{2}{\pi}t\right) \text{ ньютон}.$$

- в) Радиус кривизны траектории определяется (см. решение задачи 9.3) как $R = v^2/a_{\perp}$. В нашем случае $v^2 = 1 + (1+t)^2 + (2/\pi^2)^2 \cos^2 \pi t/2$; дифференцируя по t , получаем

$$2v \frac{dv}{dt} = 2va_{\parallel} = 2(1+t) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

В момент времени $t = 1$

$$v = \sqrt{5} \text{ м/сек}, \quad a_{\parallel} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ м/сек}^2,$$

$$a = \sqrt{2} \text{ м/сек}^2, \quad a_{\perp} = \sqrt{a^2 - a_{\parallel}^2} = \sqrt{\frac{6}{5}} \text{ м/сек}^2.$$

Таким образом,

$$R = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \text{ м} \approx 4,6 \text{ м}.$$

11.20. Используя решение задачи 11.14, можем сразу написать

$$r(t) = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 k$$

(ось z направлена вертикально вверх).

11.21. Рассмотрим на земной поверхности точку A с координатами λ_1 и φ_1 . Из начала прямоугольной системы координат (выбранной так, как указано в примечании к условию задачи, стр. 32) проведем в точку A радиус-вектор и найдем его компоненты:

$$x_A = R \cos \lambda_1 \cos \varphi_1, \quad y_A = R \cos \lambda_1 \sin \varphi_1, \quad z_A = R \sin \lambda_1,$$

т. е. $r_A = iR \cos \lambda_1 \cos \varphi_1 + jR \cos \lambda_1 \sin \varphi_1 + kR \sin \lambda_1$, где R — радиус Земли.

Аналогично, для другой точки B с угловыми координатами (λ_2, φ_2) имеем

$$r_B = iR \cos \lambda_2 \cos \varphi_2 + jR \cos \lambda_2 \sin \varphi_2 + kR \sin \lambda_2.$$

Длина дуги большого круга S_{AB} , проходящего через рассматриваемые точки, равна $R\Phi$, где Φ — угол между векторами r_A и r_B . Этот угол найдем, вычислив скалярное произведение векторов r_A и r_B :

$$r_A \cdot r_B = R^2 \cos \Phi,$$

откуда

$$\cos \Phi = \frac{r_A \cdot r_B}{R^2}.$$

С другой стороны,

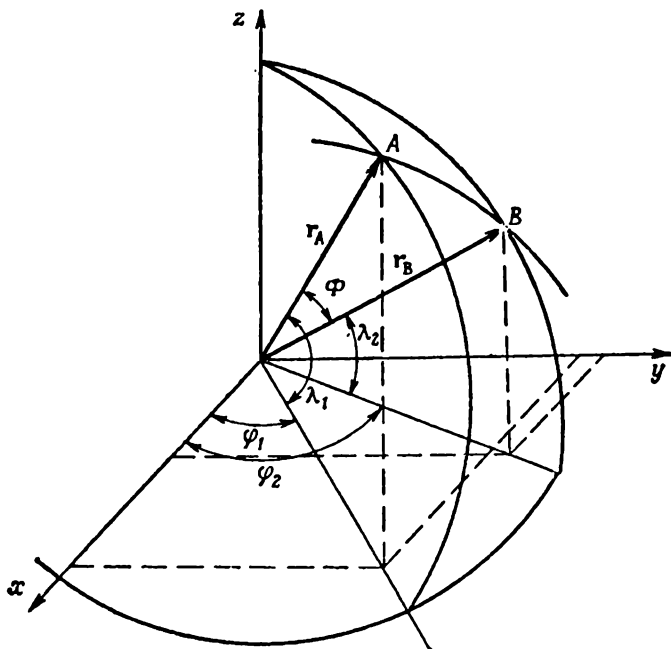
$$\begin{aligned} r_A \cdot r_B &= R^2 (\cos \lambda_1 \cos \varphi_1 \cos \lambda_2 \cos \varphi_2 + \\ &+ \cos \lambda_1 \sin \varphi_1 \cos \lambda_2 \sin \varphi_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2) = \\ &= R^2 [\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos \Phi = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2$$

и

$$S_{AB} = R \arccos [\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2].$$



11.22. На рисунке схематически показано и отмечено цифрами *I*, *II*, *III* положение Луны в новолуние, первую четверть и полнолуние.

Рассмотрим движение Луны относительно Земли. Будем считать, что вокруг Земли Луна движется по круговой орбите, поэтому её ускорение всегда направлено по радиусу орбиты к Земле.

Величина этого ускорения равна

$$a_L = \frac{v^2}{R_L} = \frac{4\pi^2 R_L}{T_L^2},$$

где R_L — расстояние от Земли до Луны, а T_L — период обращения Луны.

В решении задачи 7.3 было показано, что

$$\left(\frac{T_L}{T_3}\right)^2 = \left(\frac{R_L}{R_3}\right)^3 \frac{M_C}{M_3},$$

(T_3 — период обращения Земли вокруг Солнца, R_3 — расстояние от Земли до Солнца, а M_3 и M_C — массы Земли и Солнца).

Учитывая это, находим

$$a_L = \frac{4\pi^2}{T_3^2} \left(\frac{R_3}{R_L} \right)^3 \frac{M_3}{M_C} R_L \approx 0,27 \text{ см/сек}^2.$$

Двигаясь вместе с Землей по круговой орбите вокруг Солнца, Луна обладает еще одним центростремительным ускорением, направленным по радиусу к Солнцу, величиной

$$a_3 = \frac{4\pi^2}{T_3^2} R_3 \approx 0,60 \text{ см/сек}^2;$$

здесь мы пренебрегли R_L по сравнению с R_3 . Таким образом, результирующее ускорение Луны по отношению к Солнцу в любой момент времени равно $a = a_L + a_3$. Поэтому

$$a_I = a_3 - a_L = 0,33 \text{ см/сек}^2$$

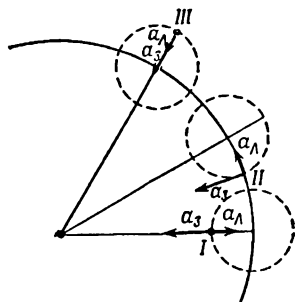
(направлено к Солнцу),

$$a_{II} = \sqrt{a_3^2 + a_L^2} \approx 0,66 \text{ см/сек}^2$$

(направлено под углом α к линии Луна — Солнце, причем $\lg \alpha = a_L/a_3 = 0,45$, $\alpha = 24^\circ 13'$),

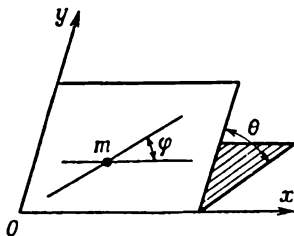
$$a_{III} = a_3 + a_L = 0,87 \text{ см/сек}^2$$

(направлено к Солнцу).

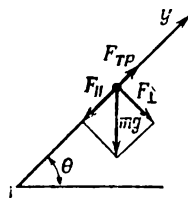


К главе 12. Характеристики сил

12.1. Кирпич расположен на плоскости так, как показано на фиг. 1. Чтобы нагляднее изобразить силы, действующие на тело, нарисуем наклонную плоскость в другой плоскости (фиг. 2). Единственной внешней, или «активной», силой, действующей на тело, является сила веса mg ,



Фиг. 1



Фиг. 2.

направленная вертикально вниз. Ее можно разложить на составляющие $F_{||}$ и $F_{\perp}$ вдоль и перпендикулярно наклонной плоскости. Первая влияет на движение вдоль оси y , а вторая уравновешивается

реакцией N плоскости: $N = F_{\perp}$. Из треугольника сил находим

$$F_{\parallel} = mg \sin \theta, \quad F_{\perp} = mg \cos \theta$$

- а) При движении тела вверх по наклонной плоскости (т. е. в положительном направлении оси y) уравнение движения имеет вид

$$ma_y = -mg \sin \theta - F_{\text{тр.}}$$

Но

$$F_{\text{тр.}} = \mu N = \mu mg \cos \theta,$$

так что

$$a_y = -g \sin \theta - \mu g \cos \theta = -g \cos \theta (\mu + \operatorname{tg} \theta).$$

- б) При движении вниз

$$ma_y = -mg \sin \theta + \mu g \cos \theta = mg \cos \theta (\mu - \operatorname{tg} \theta),$$

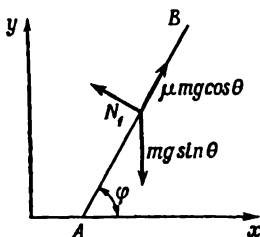
откуда

$$a_y = g \cos \theta (\mu - \operatorname{tg} \theta),$$

т. е. если $\mu \geq \operatorname{tg} \theta$, то скользить по наклонной плоскости только под действием силы тяжести кирпич не может.

в) Нарисуем для удобства плоскость xu так, чтобы она совпадала с плоскостью страницы (см фиг. 3). Составляющая силы $F_{\parallel}$ направлена вертикально вниз, а $F_{\perp}$ — перпендикулярно рисунку за страницу.

Если кирпич скользит вниз по AB , то сила трения направлена вверх по AB , как показано на фиг. 3. Кроме того, к кирпичу приложена со стороны линейки сила N_1 , равная $mg \sin \theta \cos \varphi$ и на-



Фиг. 3.

правленная перпендикулярно линии AB . Следовательно,

$$a_x = \mu g \cos \theta \cos \varphi - g \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi =$$

$$= g(\mu \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi) \cos \varphi,$$

$$a_y = -g \sin \theta + \mu g \cos \theta \sin \varphi + g \sin \theta \cos^2 \varphi =$$

$$= g(\mu \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi) \sin \varphi$$

В этом случае скольжение вниз только под действием силы тяжести становится невозможным уже при $\mu \geq \operatorname{tg} \theta \sin \varphi$.

Аналогично при движении кирпича вверх по AB :

$$a_x = -g(\mu \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi) \cos \varphi,$$

$$a_y = -g(\mu \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi) \sin \varphi.$$

- 12.2. а) Пусть кирпич движется вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0 . Уравнение его движения имеет вид

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2,$$

где $a_1 = g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$ (см. предыдущую задачу).

Через промежуток времени $t_1 = v_0/a_1 \approx 0,45$ сек (в этот момент времени его скорость $v = v_0 - a_1 t_1$ обратится в нуль) он достигнет наивысшей точки и пройдет по наклонной плоскости путь

$$S = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{v_0^2}{2a_1} \approx 0,68 \text{ м.}$$

- б) Двигаясь вниз по наклонной плоскости с ускорением $a_2 = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ (см. предыдущую задачу) и нулевой начальной скоростью, кирпич пройдет тот же путь S за время t_2 . Очевидно,

$$S = \frac{1}{2} a_2 t_2^2,$$

так что

$$t_2 = \sqrt{\frac{2S}{a_2}} \approx 0,65 \text{ сек.}$$

Полное время движения кирпича равно $t_1 + t_2 = 1,1$ сек.

- в) Кирпич теряет энергию на преодоление силы трения, поэтому изменение его кинетической энергии равно работе силы трения на пути $2S$: $\Delta T = 2S\mu mg \cos \theta \approx 2,3$ дж. Этот же результат можно получить, вычислив непосредственно изменение кинетической энергии кирпича:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_{t_2}^2 = \frac{m}{2} [v_0^2 - (a_2 t_2)^2] \approx 2,3 \text{ дж.}$$

- 12.3. Рассмотрим сначала случай, когда сила H направлена к склону. Вес W и приложенную внешнюю силу H разлагаем на две составляющие: нормальную наклонной плоскости и параллельную ей. Как видно из рисунка (где показано разложение только силы H),

$$H_{\parallel} = H \cos \alpha, \quad H_{\perp} = H \sin \alpha$$

и

$$W_{\parallel} = W \sin \alpha, \quad W_{\perp} = W \cos \alpha$$

При достаточно большой силе H груз W может начать двигаться только вверх по наклонной плоскости, так как $H_{\parallel}$ направлено вверх по плоскости, а в отсутствие силы H груз W покинтся ($\mu > \tan \alpha$). Непосредственно перед началом движения, когда к телу приложена сила $H^{\text{мин}}$, разность $H_{\parallel}^{\text{мин}} - W_{\parallel}$ должна равняться силе трения. Последнюю получим, умножив силу нормального давления $H_{\perp}^{\text{мин}} + W_{\perp}$ на коэффициент трения μ . Итак,

$$H_{\parallel}^{\text{мин}} - W_{\parallel} = \mu (H_{\perp}^{\text{мин}} + W_{\perp}),$$

или

$$H^{\text{мин}} \cos \alpha - W \sin \alpha = \mu (H^{\text{мин}} \sin \alpha + W \cos \alpha),$$

откуда

$$H^{\text{мин}} = \frac{3 \tan \alpha}{1 - 2 \tan^2 \alpha} W = \frac{3\mu}{2 - \mu^2} W \quad (\mu = 2 \tan \alpha).$$

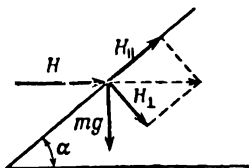
Найдем теперь минимальное значение силы H , направленной от наклонной плоскости и способной привести тело в движение. В этом случае тело W начнет двигаться вниз; для минимальной силы запишем уравнение

$$H^{\min} \cos \alpha + W \sin \alpha = \mu (-H^{\min} \sin \alpha + W \cos \alpha),$$

откуда

$$H^{\min} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} W = \frac{\mu}{2 + \mu^2} W$$

Так как $3/(2 - \mu^2)$ всегда больше, чем $1/(2 + \mu^2)$, во втором случае сила, приводящая в движение тело весом W , меньше.



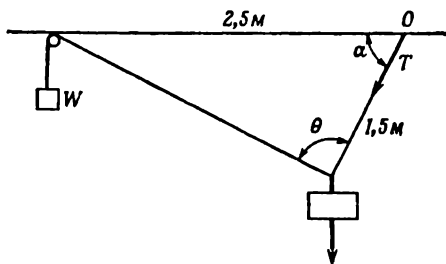
- 12.4. В точке O горизонтальная составляющая натяжения нити $T \cos \alpha$ уравнивается силой трения, которая непосредственно перед началом скольжения кольца равна $\mu T \sin \alpha$. Таким образом, $T \cos \alpha = \mu T \sin \alpha$, откуда $\operatorname{tg} \alpha = 1/\mu = 1/2$. После простых вычислений находим также, что $\sin \alpha = 1/5$, $\cos \alpha = 4/5$. По теореме синусов:

$$\frac{2,5}{\sin \theta} = \frac{1,5}{\sin [180^\circ - (\alpha + \theta)]}, \text{ откуда } \operatorname{ctg} \theta = 0, \text{ т. е. } \theta = 90^\circ.$$

Векторная сумма всех сил, действующих на груз весом 1 кг , равна нулю (груз еще не движется!), поэтому и сумма проекций всех сил на любое направление тоже равна нулю. Спроектируем сперва все силы на направление перекинутой через блок нити, натяжение которой, очевидно, равно W :

$$W - mg \cos \alpha = 0, \text{ т. е. } W = \frac{3}{5} \text{ кг} = 0,6 \text{ кг}$$

Аналогично, проецируя силы на направление нити длиной $1,5 \text{ м}$, находим $T = (4/5) \text{ кг} = 0,8 \text{ кг}$.



- 12.5. Пусть N — давление одной части замка на другую. Непосредственно перед началом движения $F_{тр} = \mu N$. Поскольку части замка не движутся, сумма вертикальных проекций сил, действующих на часть A , так же, как и горизонтальных, действующих на часть B , равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N}{\sqrt{2}} - mg &= 0, \\ -\frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N}{\sqrt{2}} + F &= 0, \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$N = \frac{\sqrt{2} mg}{1 - \mu}, \quad F = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} mg.$$

- 12.6. В системе, связанной с тележкой, на «неосторожного молодого человека» действует, кроме силы тяжести, псевдосила, равная $-ma$, где a — ускорение тележки (мы знаем, что его величина $g \sin \alpha$). Вертикальная составляющая ускорения равна $g \sin^2 \alpha$, поэтому весы будут показывать вес $mg(1 - \sin^2 \alpha) = mg \cos^2 \alpha$. Так как этот вес составляет $3/4$ «настоящего» веса, то

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \alpha = 30^\circ.$$

- 12.7. Ускорение груза массой M_2 обозначим через a_2 ; направим его вертикально вверх. Ускорение a_1 груза M_1 (которое лежит в наклонной плоскости) связано с ускорением a_2 , как мы уже знаем, соотношением $a_1 = 2a_2$ (см., например, задачи 9.9, 9.14 и 4.5).

Составим уравнения движения грузов M_1 и M_2 :

$$M_1 a_1 = M_1 g \sin \theta - \frac{T}{2},$$

$$M_2 a_2 = -M_2 g + T,$$

где T — натяжение нити, на которой подвешен груз M_2 , или

$$4M_1 a_2 = M_1 g - T,$$

$$M_2 a_2 = -M_2 g + T,$$

откуда

$$a_2 = \frac{M_1 - M_2}{4M_1 + M_2} g = \frac{1}{9} g$$

и

$$T = \frac{5M_1 M_2}{4M_1 + M_2} g \approx 222 \text{ кг}.$$

Натяжение нити, прикрепленной к грузу M_1 , равно, очевидно $T/2 \approx 111 \text{ кг}$.

- 12.8. Рассмотрим движение брусков непосредственно перед тем, как они начнут проскальзывать относительно друг друга. Запишем уравнение движения обоих брусков вместе, обозначив через μ_1 коэффициент трения второго бруска о первый, а через μ_2 — бруска о наклонную плоскость:

$$(m_1 + m_2) a = F - (m_1 + m_2) g \sin \alpha - \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha;$$

здесь α — угол, который образует наклонная плоскость с горизонтом, причем $\sin \alpha = 3/13$, $\cos \alpha = 12/13$.

Вверх по наклонной плоскости верхний брусок заставляет двигаться только сила статического трения между брусками, равная (непосредственно перед началом проскальзывания) $\mu_1 m_1 g \cos \alpha$. Под ее действием брусок движется с тем же самым ускорением a , что и нижний, поэтому

$$m_1 a = \mu_1 m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha,$$

откуда

$$a = g (\mu_1 \cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{13} g \approx 0,75 \text{ м/сек}^2$$

Наконец, величина силы F , соответствующая этому значению a , равна

$$F = \left(\frac{1}{13} + \sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha \right) (m_1 + m_2) g \approx 200 \text{ Г.}$$

- 12.9. Пусть угол θ и коэффициент трения μ таковы, что куб, предоставленный сам себе, начинает скользить. При этом изменение его потенциальной энергии (за счет опускания ц.м.) окажется больше работы силы трения: за счет этой разницы и появляется кинетическая энергия у куба. Ясно, что в положении, когда силы трения едва хватает, чтобы удержать куб, изменение потенциальной энергии при (воображаемом) небольшом смещении куба будет как раз равно работе силы трения. Как видно из рисунка, высота ц.м. куба равна $h = (l/\sqrt{2}) \cos (45^\circ - \theta)$ (l — длина ребра куба), а расстояние от нижнего ребра до стенки $x = l \cos \theta$.

Если угол θ уменьшился на величину $\Delta\theta$, то уменьшение потенциальной энергии куба равно

$$mg \Delta h = mg \frac{dh}{d\theta} \Delta\theta = \frac{mgl}{\sqrt{2}} \sin (45^\circ - \theta) \Delta\theta,$$

а работа силы трения равна $F_{\text{тр}} \Delta x = \mu N l \sin \theta \Delta\theta$, где N — сила давления куба на пол. Если угол θ такой, что куб все-таки не движется, то $N = mg$ (сумма проекций действующих на куб сил на любое направление должна быть равна нулю). Таким образом,

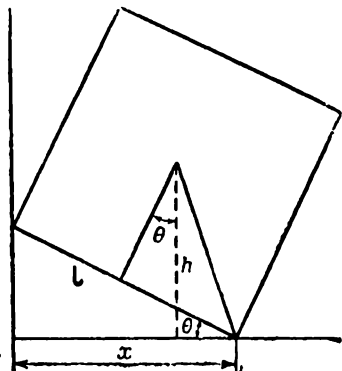
$$\frac{mgl}{\sqrt{2}} \sin (45^\circ - \theta) = \mu mgl \sin \theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1 + 2\mu}.$$

Проверим, насколько разумен наш ответ. Предположим, что угол θ очень мал. Ясно, что в этом случае нужно очень большое трение, чтобы удержать куб от скольжения. Это видно и из нашей формулы

(при $\theta \rightarrow 0 \mu \rightarrow \infty$). Если $\theta = 45^\circ$, куб балансирует на нижнем ребре и нужна очень маленькая сила со стороны стенки и соответственно очень маленькая сила трения, чтобы его удержать (при $\theta = 45^\circ \mu = 0$). Наконец, если $\mu = 1$, куб будет в равновесии при $\theta = 18^\circ 30'$.



- 12.10. Обозначим через N_1 и N_2 силы нормального давления, возникающие в местах верхнего и нижнего контактов кронштейна со столбом, а через $F_{\text{тр}}^{(1)}$ и $F_{\text{тр}}^{(2)}$ — силы трения в этих же контактах. Поскольку кронштейн находится в равновесии, проекции всех сил на горизонтальное и вертикальное направления равны нулю. Поэтому

$$N_1 = N_2,$$

$$50P + P = F_{\text{тр}}^{(1)} + F_{\text{тр}}^{(2)}$$

(P — вес кронштейна).

Непосредственно перед тем, как кронштейн начнет соскальзывать по столбу, силы трения (направленные вверх, что учтено при записи второго уравнения) равны

$$F_{\text{тр}}^{(1)} = 0,3N_1 \quad \text{и} \quad F_{\text{тр}}^{(2)} = 0,3N_2$$

Учитывая это и вводя обозначение $N_1 = N_2 = N$, вместо системы двух уравнений получаем $51P = 0,6N$.

Еще одно уравнение для P и N находим, используя принцип виртуальных перемещений.

Поворачивая кронштейн как целое на малый угол $\Delta\varphi$, например, вокруг точки O , убеждаемся (см. задачи к гл. 4), что любая точка кронштейна, расположенная на расстоянии l от оси вращения, при этом смещается влево на расстояние $l \cos \varphi \Delta\varphi$ и вниз — на $l \sin \varphi \Delta\varphi$. Но $l \cos \varphi$ — расстояние до данной точки от оси вращения по вертикали, а $l \sin \varphi$ — расстояние по горизонтали, поэтому закон сохранения энергии при выбранном виртуальном перемещении записывается в виде

$$50PX \Delta\varphi + 15P \Delta\varphi + 3N \Delta\varphi - 22N \Delta\varphi = 0,$$

или

$$50PX + 15P = 19N.$$

Из системы двух уравнений

$$50PX + 15P = 19N,$$

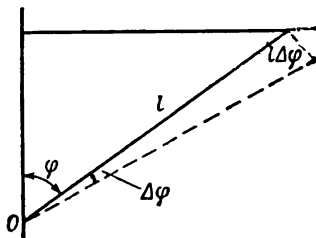
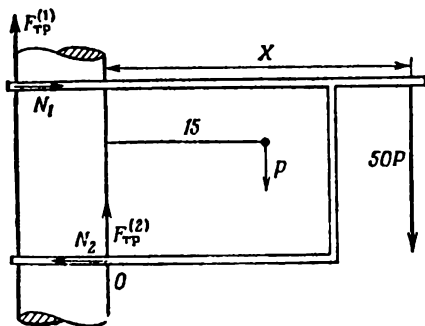
$$51P = 0,6N$$

находим

$$\frac{50X + 15}{51} = \frac{19}{0,6}.$$

откуда

$$X = 32 \text{ см.}$$



- 12.11. а) Если веревка подвинется вправо на расстояние S , то при этом будет выполнена работа ΔTS . Эта работа должна равняться работе сил трения:

$$\Delta TS = F_{\text{тр}} S,$$

откуда $\Delta T = F_{\text{тр}}$.

Но $F_{\text{тр}} = \mu N$, где N — сила нормального давления. Из рисунка видно, что

$$N = 2T \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = T \Delta\theta$$

[при сложении сил мы пренебрегли величиной ΔT по сравнению с T и положили $\sin(\Delta\theta/2) = \Delta\theta/2$]. Таким образом,

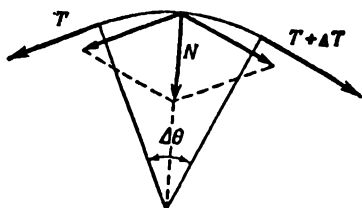
$$\Delta T = \mu T \Delta\theta,$$

или для бесконечно малых углов

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta.$$

- б) Интегрируя полученное в п. (а) уравнение, находим

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\alpha} d\theta \quad \text{и} \quad \ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\alpha,$$



где T_1 и T_2 — натяжение на концах веревки, намотанной вокруг столба на конечный угол α , так что

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\alpha}.$$

- 12.12. Перейдем в систему координат, жестко связанную с пластиной. В этой системе на тело действует псевдосила $F = ma$. Разложим ее на две составляющие: $F_{\parallel}$ вдоль пластины и $F_{\perp}$ перпендикулярно к ней. Они равны соответственно (см. рисунок)

$$F_{\parallel} = F \cos \theta, \quad F_{\perp} = F \sin \theta.$$

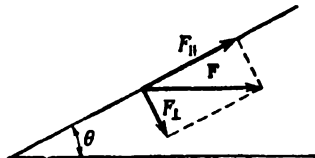
Уравнение движения в выбранной нами системе координат имеет вид (ось x направлена вверх по пластине)

$$m\ddot{x} = F_{\parallel} - mg \sin \theta,$$

т. е.

$$\ddot{x} = a \cos \theta - g \sin \theta.$$

Путь S тело проходит за время (начальная скорость тела равна нулю)



$$t = \sqrt{\frac{2S}{a \cos \theta - g \sin \theta}} \approx 2,16 \text{ сек.}$$

- 12.13. а) В гл. 12 «Лекций» (вып. 1) показано, что на заряд q , помещенный в электрическое поле напряженностью E , действует сила F , равная qE , причем F измеряется в *ньютон*ах, а q — в *кулон*ах. Отсюда

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \text{ньютон/кулон}$$

(символ $[A]$ означает размерность физической величины A). Однако и *ньютон* и *кулон* являются производными единицами. В международной системе единиц МКСА 1 *ньютон* = 1 кг·м/сек², а 1 *кулон* = 1 а·сек (a — основная единица силы тока), поэтому

$$[E] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{а} \cdot \text{сек}^3.$$

- б) На заряд q , движущийся в магнитном поле со скоростью v , действует сила

$$F = qvB \quad (B \text{ — магнитная индукция}),$$

откуда

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = (\text{ньютон} \cdot \text{сек}) / (\text{кулон} \cdot \text{м}) = \text{кг} / (\text{а} \cdot \text{сек}^2).$$

- в) Размерность отношения E к B есть

$$\frac{[E]}{[B]} = [v] = \text{м/сек}.$$

Обратите внимание, что так называемая скорость дрейфа частиц в скрещенном электрическом и магнитном полях равна как раз этому отношению (подробнее см. «Лекции», вып. 6, стр. 343 или задачу 12.16).

- г) Для гравитационного поля C :

$$F = mC \quad \text{и} \quad [C] = \frac{[F]}{[m]} = \text{ньютон/кг} = \text{м/сек}^2.$$

- 12.14. Пусть частица движется в плоскости xy , а магнитная индукция направлена по оси z . На частицу действует сила, компоненты которой (см. § 4 гл. 12 «Лекций», вып. 1)

$$F_x = qv_y B, \quad F_y = -qv_x B, \quad F_z = 0.$$

Легко видеть, что $F \perp v$ (так как $F \cdot v = 0$) и

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = qvB.$$

Как было показано в задаче 9.1, под действием такой силы частица равномерно движется по круговой орбите в плоскости xy , причем радиус орбиты равен $R = mv/qB$.

- 12.15. Поскольку частица движется равномерно по круговой орбите, то время одного оборота T найдем по формуле

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(в предыдущей задаче показано, что $R = mv/qB$).

При ускорении частицы в циклотроне необходимо точно знать время T , чтобы правильно выбрать частоту ускоряющего электриче-

ского поля. Период колебаний этого поля должен совпадать с периодом обращения частицы (так называемое условие резонанса, или синхронизма).

- 12.16. а) Уравнение движения частицы в электромагнитном поле записывается в виде [см. формулу (12.11) «Лекций», вып. 1, стр. 229]

$$m\ddot{x} = qv_y B_z = q\dot{y}B_z,$$

$$m\ddot{y} = qE_y - qv_x B_z = qE_y - q\dot{x}B_z,$$

$$m\ddot{z} = 0.$$

- б) Применяя преобразования Галилея

$$x' = x - \frac{E_y}{B_z} t, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

так что

$$\dot{x}' = \dot{x} - \frac{E_y}{B_z}, \quad \dot{y}' = \dot{y}, \quad \dot{z}' = \dot{z}$$

и

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \quad \ddot{y}' = \ddot{y}, \quad \ddot{z}' = \ddot{z},$$

получаем следующие уравнения движения в штрихованной системе:

$$m\ddot{x}' = q\dot{y}' B_z,$$

$$m\ddot{y}' = -q\dot{x}' B_z,$$

$$m\ddot{z}' = 0.$$

Как следует из уравнений движения (см. задачу 12.14), в штрихованной системе координат частица будет двигаться по круговой орбите в плоскости $x'y'$ радиусом $R = mv'/qB_z$.

Из преобразований Галилея видно, что штрихованная система координат движется в положительном направлении оси x нештрихованной системы со скоростью $v_d = E_y/B_z$. (Скорость v_d называют скоростью дрейфа.) Значит, в нештрихованной системе координат частица движется по циклоиде (ср. с задачей 8.12).

К главе 14. Работа и потенциальная энергия

- 14.1. $F = 1,5y \mathbf{i} + 3x^2 \mathbf{j} - 0,2(x^2 + y^2) \mathbf{k}$ ньютон. При $t = 0$ $\mathbf{r}_0 = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$ м,

а $\mathbf{v}_0 = 2 \mathbf{j} + \mathbf{k}$ м/сек; следовательно,

а) $\mathbf{F}_0 = 4,5 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j} - 2,6 \mathbf{k}$ ньютон,

б) $\mathbf{a}_0 = 4,5 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j} - 2,6 \mathbf{k}$ м/сек²,

в) $T_0 = \frac{mv_0^2}{2} = 2,5$ дж,

г) $\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 21,4$ дж/сек.

- 14.2. Приближенно можно положить для $t = 0,01$ сек:

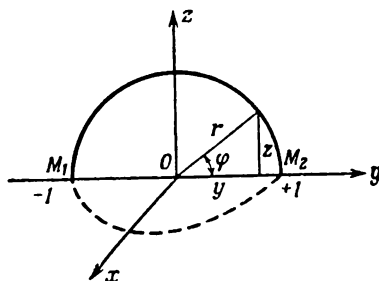
а) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot 0,01 = 2,00 \mathbf{i} + 3,02 \mathbf{j} + 0,01 \mathbf{k}$ м,

б) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 \cdot 0,01 = 0,045 \mathbf{i} + 2,12 \mathbf{j} + 0,97 \mathbf{k}$ м/сек,

в) $T = T_0 + \frac{dT}{dt} \cdot 0,01 = 2,71$ дж (или $T = \frac{mv^2}{2} = 2,71$ дж).

- 14.3. а) Работа силы F при перемещении на dS равна $dA = F dS = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. Поэтому при перемещении частицы вдоль оси y $dx = dz = 0$, и работу совершает только y -компонента силы. Но $F_y = 3x^2 = 0$ ($x = 0$ при движении вдоль оси y); следовательно, и работа силы F равна нулю.
- б) В этом случае нужно принимать во внимание только y - и z -компоненты силы F , так как перемещение перпендикулярно оси x . Однако $F_y = 0$ ($x = 0$ для всех точек плоскости yz), поэтому работа силы F равна

$$W = \int_{M_1}^{M_2} F_z dz = -0,2 \int_{M_1}^{M_2} y^2 dz.$$



Как видно из рисунка, $z = \sin \varphi$, $y = \cos \varphi$, точке M_1 соответствует значение угла $\varphi = \pi$, а точке M_2 — значение $\varphi = 0$; следовательно (учтите, что $dz = \cos \varphi d\varphi$),

$$W = -0,2 \int_{\pi}^0 \cos^3 \varphi d\varphi = -0,2 \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0} = 0.$$

Однако это еще не означает, что сила F консервативна. Можно найти такие траектории частицы, для которых работа силы F не равна нулю. Например, если частица перемещается из точки M_1 в точку M_2 по окружности единичного радиуса в плоскости xy , то работа силы F равна

$$\begin{aligned} W &= \int_{M_1}^{M_2} F_x dx + \int_{M_1}^{M_2} F_y dy = 1,5 \int_{M_1}^{M_2} y dx + 3 \int_{M_1}^{M_2} x^2 dy = \\ &= 1,5 \int_{\pi}^0 \cos^2 \psi d\psi - 3 \int_{\pi}^0 \sin^3 \psi d\psi = \\ &= 1,5 \left[\frac{1}{2} \psi + \frac{1}{4} \sin 2\psi \right]_{\psi=\pi}^{\psi=0} + 3 \left[\cos \psi - \frac{1}{3} \cos^3 \psi \right]_{\psi=\pi}^{\psi=0} = 1,6 \text{ Дж} \end{aligned}$$

[теперь уже $x = \sin \psi$, $y = \cos \psi$, $dx = \cos \psi d\psi$ и $dy = -\sin \psi d\psi$, а угол ψ лежит в плоскости xy].

Таким образом, работа при перемещении частицы из точки $(0, -1, 0)$ в точку $(0, 1, 0)$ зависит от пути перемещения; следовательно, поле силы F неконсервативно.

- 14.4. 1. а) Кинетическая энергия частицы в конце пути равна работе, совершаемой силой F . Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = \int_0^3 (3 + 4x) dx = 27 \text{ Дж},$$

откуда

$$v = 3 \text{ м/сек.}$$

б) Из уравнения движения $ma = F_x$ находим

$$a = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} x \right) \text{ м/сек}^2.$$

Следовательно, ускорение частицы в конце пути $a = 2,5 \text{ м/сек}^2$.

в) Мощность равна изменению кинетической энергии в единицу времени, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = F \cdot v = 45 \text{ вт.}$$

2. В этом случае удобнее непосредственно проинтегрировать уравнение движения $ma = 3 + 4t$, откуда

$$v = \frac{3}{m} t + \frac{4}{2m} t^2 = \frac{1}{2} t + \frac{1}{3} t^2 \text{ м/сек}$$

(здесь учтено, что $v = 0$ при $t = 0$). Следовательно, при $t = 3 \text{ сек}$

$$v = 4,5 \text{ м/сек.} \quad a = \frac{3 + 4t}{m} = 2,5 \text{ м/сек}^2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = F \cdot v = 67,5 \text{ вт.}$$

14.5. Как было показано в «Лекциях» (вып. 1), поле и потенциал вне сферической оболочки равны полю и потенциалу точечного заряда, помещенного в центр сферы и равного по величине полному заряду оболочки. (Внутри оболочки поле равно нулю, т. е. потенциал не меняется от точки к точке.) Итак,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где R — радиус оболочки, q — ее полный заряд. Находим далее

$$q = 4\pi\epsilon_0 \varphi R = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ кулон.}$$

14.6. Пусть A и B — радиусы соответственно внешней и внутренней сфер. Пользуясь результатом предыдущей задачи и принципом суперпозиции, вычислим потенциал на поверхности внешней сферы. Заряды, расположенные на внутренней сфере, создают на внешней сфере потенциал $q/4\pi\epsilon_0 A$ (q — заряд внутренней сферы), а заряды, расположенные на самой внешней сфере, — потенциал $-q/4\pi\epsilon_0 A$ (напомним, что заряды сфер равны по величине и противоположны по знаку). Таким образом, потенциал внешней сферы равен нулю.

Займемся теперь внутренней сферой. Потенциал, создаваемый на ней ее собственными зарядами, равен $q/4\pi\epsilon_0 B$, а зарядами внешней сферы равен $(-q)/4\pi\epsilon_0 A$. Итак, разность потенциалов между сферами равна потенциалу внутренней сферы, так что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right)$$

и

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{AB}{A - B} \phi.$$

14.7.

$$r_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ в } (R_3 = 6370 \text{ км})$$

14.8. Мощность P связана с силой F и скоростью v соотношением $P = Fv$, так что $F = P/v$

Из уравнения движения $ma = F$ (m — масса автомобиля) имеем

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P}{mv} = 7,2 \text{ м/сек}^2.$$

14.9. Масса всего кабеля $m = ML$. В начальный момент времени центр тяжести кабеля находился на расстоянии $L/4$ от оси блока, в конечный — на расстоянии $L/2$.

Таким образом, изменение потенциальной энергии кабеля равно

$$gML \frac{L}{2} - gML \frac{L}{4},$$

т. е.

$$\Delta U = \frac{1}{4} ML^2 g.$$

Изменение кинетической энергии ΔE кабеля с учетом того, что вначале он покоился, равно

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} MLv^2.$$

(Разумеется, все точки кабеля движутся с одной и той же скоростью v .)

Из закона сохранения энергии имеем $\Delta U = \Delta E$, откуда

$$\frac{1}{4} ML^2 g = \frac{1}{2} MLv^2 \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

14.10. Пусть вода вырывается из наконечника со скоростью v . Зная высоту подъема воды и угол наклона наконечника к горизонту, можно найти начальную скорость струи.

Действительно, $H_{\max} = (v^2/2g) \sin^2 \alpha$, откуда

$$v^2 = \frac{2gH}{\sin^2 \alpha} = 8gH$$

(здесь учтено, что $\alpha = 30^\circ$).

В единицу времени из шланга выбрасывается масса воды $m = \rho Sv$, где S — площадь поперечного сечения наконечника, а ρ — плотность воды. Полезная работа мотора в единицу времени затрачивается на поднятие этой массы воды из резервуара на высоту h и на выбрасывание ее из шланга со скоростью v . Она равна

$$P_n = mgh + \frac{1}{2} mv^2 = \rho g v S (h + 4H).$$

Мощность мотора P , очевидно, равна

$$P = \frac{P_n}{\eta},$$

где η — коэффициент полезного действия, т. е.

$$P = \frac{\rho g v S}{\eta} (h + 4H).$$

Подставляя численные значения входящих в формулу для P величин, получаем $P = 25$ кВт.

- 14.11. Работа W , затрачиваемая атлетом на каждый бросок, равна $mv^2/2$, где m — масса спортивного снаряда, а v — его начальная скорость. Таким образом, для вычисления W необходимо найти v .

Обозначим через S дальность полета снаряда. Как видно из рисунка, $S = S_0 + S_1$, где S_0 — дальность полета снаряда, если бы он был брошен со скоростью v с поверхности Земли, а S_1 — горизонтальная дальность полета из точки B до соприкосновения снаряда с землей. Имеем

$$S_0 = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}$$

(здесь учтено, что $\alpha = 45^\circ$), а S_1 вычислим, рассматривая отдельно движение снаряда из точки B . Из закона сохранения энергии следует, что $v_B = v$ (сопротивлением воздуха пренебрегаем) и что вектор v_B направлен под углом 45° к горизонту. Поэтому $S_1 = (v/\sqrt{2}) t$, где t — время падения снаряда из точки B на землю, которое определяется из уравнения

$$h = \frac{v}{\sqrt{2}} t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Положительное решение этого квадратного (относительно t) уравнения записывается в виде

$$t = \frac{-\sqrt{2} v + \sqrt{2v^2 + 8gh}}{2g}.$$

Таким образом,

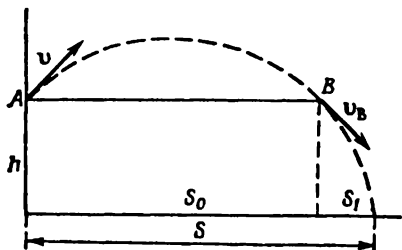
$$S_1 = \frac{-v^2 + v \sqrt{v^2 + 4gh}}{2g} \quad \text{и} \quad S = \frac{v^2 + v \sqrt{v^2 + 4gh}}{2g}.$$

Из последнего соотношения выражаем v^2 через S и h :

$$v^2 = \frac{gS^2}{S + h}.$$

Следовательно, искомая работа

$$W = \frac{m}{2} \frac{gS^2}{S + h}.$$



Подставляя в это выражение соответственно массы ядра, диска и копья и дальности их полета, находим работу, затраченную спортсменами при рекордных бросках этих снарядов:

$$W_{\text{я}} = 647 \text{ Дж}, W_{\text{д}} = 588 \text{ Дж}, W_{\text{к}} = 328 \text{ Дж},$$

или

$$W_{\text{я}} : W_{\text{д}} : W_{\text{к}} = 2 : 1,8 : 1.$$

- 14.12. При равномерном движении автомобиля по горизонтальному участку дороги вся мощность двигателя P_1 уходит на преодоление сил трения, поэтому $P_1 = F_{\text{тр}}v$, откуда $F_{\text{тр}} = P_1/v$.

При движении под углом α к горизонту мощность двигателя расходуется как на преодоление сил трения, так и на преодоление сил тяжести. Следовательно, развиваемая мотором сила тяги

$$F = W \sin \theta + F_{\text{тр}}$$

(W — вес автомобиля), а его мощность

$$P = Fv = Wv \sin \theta + P_1.$$

При максимальном угле уклона мотор развивает максимально возможную мощность ($P_{\text{макс}} = 85 \text{ л. с.}$). Таким образом,

$$\sin \theta_{\text{макс}} = \frac{P_{\text{макс}} - P_1}{Wv} = 0,30 \text{ и } \theta_{\text{макс}} \approx 17^\circ 30'.$$

- 14.13. Разобьем все сферическое тело на большое число тонких слоев и проследим действие этих слоев на частицу массой m , расположенную на расстоянии r от центра тела. В § 4 гл. 13 «Лекций» (вып. 1, стр. 246) было показано, что если масса m находится вне шарового слоя, то потенциальная энергия массы m такова, как если бы вся масса слоя собралась в его центре. Если $r > R$, то масса m является внешней по отношению ко всем слоям сферического тела; следовательно, ее потенциальная энергия W такова, как если бы вся масса тела собралась в его центре, т. е.

$$W = - \frac{GmM}{r}.$$

Потенциал Ψ гравитационного поля массы M связан с энергией W частицы m в этом поле соотношением $W = m\Psi$, а с напряженностью $C(r)$ этого поля — соотношением $\int C(r)dr = -\Psi(r)$ [см. «Лекции», вып. 1, стр. 260, формула (14.7)].

Поэтому в рассматриваемом случае $\Psi(r) = -GM/r$, а напряженность $C(r) = GM/r^2$ и направлена к центру сферы.

Если $r < R$, то масса m окажется внешней по отношению ко всем слоям, радиусы которых меньше r , и внутренней по отношению ко всем остальным слоям.

Поэтому потенциальная энергия массы m состоит из двух членов: W_1 и W_2 ; W_1 — потенциальная энергия по отношению к внутренним слоям, она равна

$$- \frac{1}{r} \left\{ GM \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{-1} \frac{4}{3} \pi r^3 m \right\} = - \frac{GMmr^2}{R^3};$$

W_2 — потенциальная энергия массы m по отношению к тем слоям, внутри которых она находится.

Рассмотрим отдельно один шаровой слой радиусом r_1 и толщиной dr_1 . Потенциальная энергия тела m по отношению к этому слою dW' постоянна и равна (см. § 5 гл. 14 «Лекций»)

$$dW' = - \frac{Gm dm'}{r_1},$$

где $dm' = \frac{4\pi r_1^2 dr_1}{(4/3)\pi R^3} M$ — масса шарового слоя, т. е.

$$dW' = - \frac{3GmM}{R^3} r_1 dr_1.$$

Полную энергию массы m по отношению ко всем внешним слоям найдем, проинтегрировав dW' по всем слоям:

$$W_2 = \int_r^R dW' = - \frac{3GmM}{R^3} \int_r^R r_1 dr_1 = - \frac{3}{2} \frac{GmM}{R^3} (R^2 - r^2).$$

Таким образом, энергия тела m внутри массы M равна

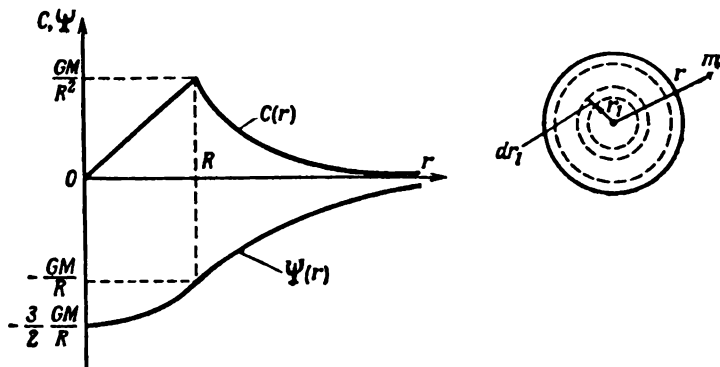
$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \frac{GmM}{R^3} (r^2 - 3R^2).$$

Отсюда нетрудно получить потенциал и напряженность гравитационного поля внутри тела:

$$\Psi(r) = - \frac{3}{2} \frac{GM}{R} + \frac{GM}{2R^3} r^2,$$

$$C(r) = \frac{GM}{R^3} r.$$

Снова для напряженности поля $C(r)$ мы указали только ее модуль, направлена она, как и для массы вне сферы, к центру сферы. Для удобства изображения на рисунке приведены модуль напряженности (кривая над осью r) и потенциал (кривая под осью r) гравитационного поля.



- 14.14. Скорость груза m непосредственно перед падением его на чашку весов, определенная из закона сохранения энергии, равна $v = \sqrt{2gh}$. Скорость v_1 чашки с грузом после удара найдем из закона сохранения количества движения

$$mv = (m + m_1) v_1, \text{ откуда } v_1 = \frac{m}{m + m_1} v$$

(m_1 — масса чашки весов).

В наинизшей точке (расположенной на h_1 ниже первоначального положения чашки) полная кинетическая и потенциальная энергии чашки и груза перейдут в потенциальную энергию растянутой пружины:

$$\frac{m + m_1}{2} v_1^2 + (m + m_1) gh_1 = \frac{1}{2} k (h_1 + l_0)^2 - \frac{1}{2} kl_0^2,$$

где k — упругость пружины, а l_0 — ее удлинение перед падением груза на чашку, $l_0 = m_1 g / k = 1,6$ см.

После несложных преобразований полученное уравнение приводится к виду

$$h_1^2 - 2h_0 h_1 - \frac{2m}{m + m_1} h_0 h = 0$$

(здесь введено обозначение $h_0 = mg/k = 3,2$ см). Решая это уравнение, находим

$$h_1 = h_0 + \sqrt{h_0 \left(h_0 + \frac{2m}{m + m_1} h \right)} \approx 10,1 \text{ см.}$$

Таким образом, груз m опустится вниз на расстояние $h + h_1 = 19,1$ см.

- 14.15. Пусть к пружине приложена сила F_0 . Величина растяжения пружины x_0 определяется из условия $kx_0 = F_0$.

Растянем теперь пружину на величину x относительно нового положения равновесия. Сила, приложенная к пружине, равна теперь $k(x + x_0) = kx + kx_0 = F_0 + kx$. Видно, что добавочная сила, растягивающая пружину на расстояние x из нового положения равновесия, такая же, как если бы пружина растягивалась на x из ненапряженного состояния. Отсюда следует, что жесткость пружины осталась неизменной.

- 14.16. Если тележка проходит верхнюю точку петли «на пределе», почти не касаясь путевого полотна, сила давления на нее со стороны полотна, естественно, равна нулю. Таким образом, в этой точке на тележку действует только сила тяжести mg . Ускорение тележки в наивысшей точке равно $g = v^2/R$, поэтому ее скорость в этой точке равна $\sqrt{gR}$. Если тележка начала движение с высоты H над петлей без начальной скорости, то из закона сохранения энергии следует

$$mgH = \frac{mv^2}{2}, \text{ т. е. } H = \frac{1}{2} R.$$

- 14.17. Пусть тело срывается в точке сферы, радиус-вектор которой образует угол α с вертикалью. В этой точке сила нормального давления тела на сферу равна нулю. Поэтому проекция ускорения свободного падения на этот радиус-вектор ($g \cos \alpha$) равна центростремительному ускорению.

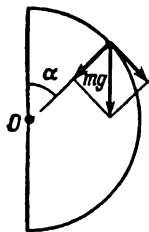
Таким образом,

$$\frac{v^2}{R} = g \cos \alpha.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha).$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем $\cos \alpha = 2/3$.



Таким образом, тело сорвется в точке, отстоящей от вершины сферы по вертикали на расстояние $(1/3)R$. По дуге сферы тело пройдет при этом путь $S = \alpha R = 0,85R$.

- 14.18. Поместим начало системы координат в фокус эллипса (там же находится масса M), а ось x направим вдоль его большой оси. Полная энергия тела массой m , равная сумме его кинетической и потенциальной энергий, т. е. $E = mv^2/2 - GmM/r$, сохраняется. Следовательно, E — константа, не зависящая ни от времени, ни от r . Поэтому удобно вычислить ее для таких положений тела m , в которых его радиус-вектор и скорость особенно просто выражаются через параметры эллипса.

Таковыми положениями являются апогей и перигей, отмеченные точками A и P на рисунке. Для них $r_A = a(1 + e)$, $r_P = a(1 - e)$. Скорости v_A и v_P перпендикулярны оси x (так как они направлены по касательной к эллипсу). Кроме того, как было показано в задаче 7.7, в соответствии со вторым законом Кеплера эти скорости связаны между собой соотношением

$$v_A r_A = v_P r_P.$$

Таким образом,

$$E_A = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{GmM}{a(1+e)},$$

$$E_P = \frac{mv_P^2}{2} - \frac{GmM}{a(1-e)},$$

$$v_A r_A = v_P r_P, \quad E_A = E_P = E,$$

откуда следует,

$$E(r_A^2 - r_P^2) = -GmM(r_A - r_P),$$

т. е.

$$E = -\frac{GmM}{2a}.$$

Теперь мы можем более детально изучить движение спутника из задачи 10.3 под действием силы торможения $F = \rho S v^2$. Пусть в на-

чальный момент времени $t = 0$ спутник находится на стационарной орбите радиусом $r_0 = R + h$ (обозначения те же, что и в задаче 10.3) и движется со скоростью $v_0 = \sqrt{gR} (R/r_0)$

Полная энергия спутника на произвольной круговой орбите, как было только что показано, равна

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2r}.$$

Но изменение энергии (за счет трения) спутника в единицу времени равно мощности сил трения; следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = -\rho S v^2 v = -\rho S v^3.$$

Считая, что орбита спутника незначительно отличается от круговой, можно положить $mv^2/r = GmM/r^2$ или $mv^2 = GmM/r$, так что $E = -mv^2/2$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \rho S v^3,$$

откуда

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\rho S}{m} dt \quad \text{и} \quad -\frac{1}{v} = \frac{\rho S}{m} t + C.$$

Константу интегрирования C найдем из начальных условий: $C = -1/v_0$. Окончательно

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{\rho S}{m} t.$$

Таким образом, вследствие «торможения» скорость спутника не уменьшается, а увеличивается (для любого $t > 0$ $v > v_0$). Оценим изменение модуля скорости за один период $T = 2\pi r_0/v_0$. После несложных преобразований, используя данные задачи 10.3, находим

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{2\pi \rho S r_0/m}{1 - 2\pi \rho S r_0/m} \approx \frac{2\pi \rho S r_0}{m} = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

Эта оценка показывает, что использованное нами приближение квазистационарности орбиты спутника вполне оправдано.

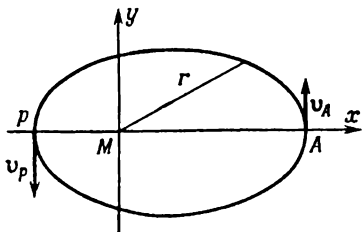
- 14.19. а) Эллипс можно получить из окружности радиусом b , если увеличить масштаб вдоль одной из осей координат в a/b раз (см. задачу 7.4). При увеличении масштаба вдоль одной из осей площади фигур увеличиваются во столько же раз, поэтому площадь эллипса равна

$$\pi b^2 \frac{a}{b} = \pi a b$$

(a — длина большой полуоси).

- б) Вычислим скорость планеты в апогее (см. решение задачи 14.18):

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{GmM}{a(1+e)} = -\frac{GmM}{2a},$$



откуда

$$v_A^2 = \frac{GM}{a} \frac{1-e}{1+e}.$$

Действуя далее так же, как в задаче 7.4, находим

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{GM}.$$

- в) Используя результат задачи 14.18, выразим длину большой полуоси орбиты через полную энергию и массу планеты:

$$a = \frac{GM}{2} \frac{m}{|E|}.$$

Подставляя ее в формулу для периода, получаем

$$T^2 = \frac{\pi^2 G^2 M^2}{2} \left(\frac{m}{|E|} \right)^3.$$

Отсюда и следует утверждение, что орбиты всех тел, у которых на единицу массы приходится одинаковая энергия, соответствуют равным периодам обращения (период зависит только от отношения m к $|E|$).

- 14.20. Уменьшение кинетической энергии корабля по мере его удаления от Земли происходит за счет увеличения его потенциальной энергии, т. е.

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{v_2}{2} = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{r}.$$

Здесь v_0 и v — скорости корабля соответственно около Земли ($R \approx 6500$ км) и на расстоянии $r \approx 10^6$ км.

Если бы корабль покинул Землю со второй космической скоростью v_1 , то на очень больших расстояниях от Земли он двигался бы с очень маленькой скоростью, т. е.

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{GM}{R}.$$

Таким образом,

$$v^2 = v_0^2 - v_1^2 + 2 \frac{GM}{r} = v_0^2 - v_1^2 + v_1^2 \frac{R}{r} \approx 23,8 \text{ (км/сек)}^2,$$

т. е.

$$v \approx 4,88 \text{ км/сек.}$$

- 14.21. Обозначим через v скорость космического корабля относительно Солнца в момент прекращения работы двигателей, а через v' — его скорость «на выходе». Потенциальная энергия корабля обусловлена притяжением Земли и Солнца. Когда корабль находится около Земли, его потенциальная энергия равна

$$-\frac{GmM}{R} - \frac{GmM_{\odot}}{R_1},$$

где m , M и $M_{\odot}$ — массы соответственно корабля, Земли и Солнца; R — радиус Земли; R_1 — радиус земной орбиты, которую для простоты будем считать круговой.

Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R} + \frac{GM_{\odot}}{R_1} + \frac{v'^2}{2}.$$

Заметим, что

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2} v_1^2,$$

где v_1 — вторая космическая скорость (см. предыдущую задачу), а из условия стационарности земной орбиты следует

$$v_0^2 = \frac{GM_{\odot}}{R_1},$$

где v_0 — орбитальная скорость Земли.

Таким образом, $v^2 = v_1^2 + 2v_0^2 + v'^2$, откуда $v = 47$ км/сек. Скорость корабля относительно Земли будет минимальной, когда он запущен в направлении орбитального движения Земли. Тогда

$$v_{\min} = v - v_0 = 17 \text{ км/сек.}$$

14.22. Скорость корабля относительно Земли максимальна, если корабль запущен по касательной к орбите Земли в направлении, противоположном движению Земли. В этом случае $v_{\max} = v + v_0 = 77$ км/сек.

14.23. Период обращения планеты вокруг Солнца зависит только от величины большой полуоси эллипса орбиты. Из того, что периоды обращения Земли и космического корабля совпадают, следует равенство больших полуосей орбит Земли и корабля.

Величиной большой полуоси полностью определяется и другая характеристика планеты — полная энергия на единицу массы (см. задачу 14.18). Поэтому, когда Земля и космический корабль находятся на одинаковых расстояниях от Солнца (и, следовательно, имеют по отношению к Солнцу одну и ту же потенциальную энергию на единицу массы), их скорости относительно Солнца одинаковы по величине.

Заметим, что мы не учли в этих рассуждениях притяжения корабля Землей. Будем считать для начала, что корабль берет старт не с Земли, а из некоторой периферийной точки «околоземного пространства», где потенциал тяготения Солнца начинает превышать потенциал тяготения Земли. Оценим, насколько такая точка удалена от Земли. Потенциал Солнца ($-GM_{\odot}/R_1$) и потенциал Земли ($-GM/R$) становятся равными, если $R = R_1 M/M_{\odot}$. Поскольку $M/M_{\odot} \approx 2,5 \times 10^{-5}$, если удалиться от Земли, скажем, на десяти тысячную радиуса земной орбиты, потенциал Солнца будет превышать потенциал Земли (а «с точки зрения Солнца» Земля и корабль будут по-прежнему в одном и том же месте!).

Существуют четыре варианта запуска. Два из них показаны на рисунках а и б, два других отличаются от приведенных направлением движения корабля по орбите. Рассчитаем вариант (а) (как более экономный). Так как корабль в перигее подходит очень близко к Солнцу, его скорость при пересечении земной орбиты (которую здесь и далее считаем круговой) практически параллельна линии, проходящей через фокусы орбиты корабля. Найдем угол α . Из прямоугольного треугольника ОАК (на рисунке в) $\cos \alpha = (a - r_p)/a = 0,99$ (a —

большая полуось орбиты корабля, равная радиусу орбиты Земли). Из треугольника ABC находим $BC = v'$ — скорость запуска корабля из периферии околоземного пространства. Учитывая, что $AB = AC = v_0$ (v_0 — орбитальная скорость Земли), имеем

$$v'^2 = 2v_0^2 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = 2v_0^2 (1 - \sin \alpha).$$

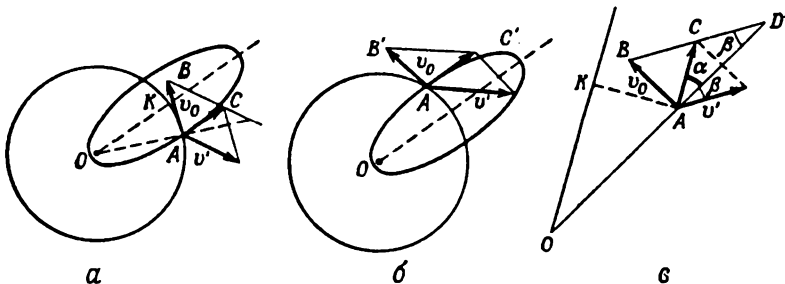
Вспомня, что $v_0 = 30$ км/сек, находим

$$v' = 39,2 \text{ км/сек.}$$

Угол β , под которым запущен корабль относительно линии Земля — Солнце, найдем из треугольника ABD (замечая, что $\angle ABC = \beta + \alpha$):

$$\beta = \frac{90 - \alpha}{2} = 41^\circ.$$

Учтем теперь, что корабль стартует с поверхности Земли. Вспомня задачу 14.21, находим, что истинная скорость запуска $v = \sqrt{v'^2 + v_1^2}$, где v_1 — вторая космическая скорость. Итак, $v \approx 42$ км/сек.



- 14.24. Представим себе сначала, что в сферическом теле нет никакой полости. Ускорение свободного падения в точке P равно в этом случае

$$a_0 = \frac{G\rho}{(R+x)^2} \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Выделим теперь внутри тела часть вещества, занимающую тот же объем и положение, что и фигурирующая в условии полость. Согласно принципу суперпозиции, ускорение в точке P можно представить в виде суммы двух членов: ускорения, обусловленного веществом в выделенном объеме:

$$a' = \frac{G\rho}{\left(x + \frac{5}{4}R\right)^2} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R}{4}\right)^3,$$

и ускорения a (именно это ускорение вызывается притяжением тела и полости). Поскольку все три ускорения направлены вдоль одной прямой PC , то

$$a = a_0 - a' = \frac{G\rho}{(x+R)^2} \frac{4\pi}{3} R^3 \left[1 - \left(8 + \frac{2R}{x+R} \right)^{-2} \right].$$

К главе 15. Специальная теория относительности

- 15.1. Так как уравнения, связывающие x', y', z', t' с x, y, z, t , линейны, выразить нештрихованные координаты через штрихованные не представляет труда. Имеем

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right),$$

где введены обозначения $\beta = u/c$, $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$.

Эти формулы можно было получить и не решая уравнений, а просто заменив в исходных преобразованиях Лоренца u на $-u$ и поменяв местами координаты x, y, z, t и x', y', z', t' (поскольку система x, y, z движется относительно x', y', z' со скоростью $-u$).

- 15.2 Рассмотрим работу «световых часов» в неподвижной и движущейся системах координат. Для наблюдателя, который движется вместе с часами, луч света от одного конца стержня до другого и обратно пройдет за промежуток времени $t = 2L/c$, где L — длина стержня.

Как же представляется работа этих часов для неподвижного наблюдателя? Прежде всего ему кажется, что длина стержня не L , а $L' = L\sqrt{1 - u^2/c^2}$ (u — скорость движения часов). Если время движения светового сигнала от одного конца стержня до другого в направлении движения стержня равно t_1 , то за это время сам прибор сместится на расстояние ut_1 , и свет пройдет расстояние не L' , а $L' + ut_1$, так что $ct_1 = L' + ut_1$ и $t_1 = L'/(c - u)$. Для прохождения света от одного конца стержня до другого против движения самого стержня требуется время t_2 , причем $ct_2 = L' - ut_2$ и $t_2 = L'/(c + u)$. Общее время движения света

$$t' = t_1 + t_2 = \frac{2L'}{c(1 - u^2/c^2)} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Таким образом, свету понадобится большее время, чтобы пройти из конца в конец движущийся стержень, нежели неподвижный стержень, т. е. движущиеся часы будут отставать по сравнению с неподвижными. Обратим внимание, что это отставание точно такое же, как и в случае, когда часы ориентированы поперек движения (см. § 4 гл. 15 «Лекций», вып. 2, стр. 272).

- 15.3. С точки зрения земного наблюдателя, время жизни мюона такое, что за это время, двигаясь со скоростью u , он успевает пройти путь L , поэтому

$$t = \frac{L}{u} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Время жизни мезона τ в его собственной системе координат составляет

$$\tau = l \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$$

пройденный же им путь (вернее, толщина слоя «прошедшей» мимо него атмосферы) равен

$$D = \tau u = l \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 0,7 \text{ км.}$$

15.4. а) Для производства энергии E необходимо превратить в энергию вещество массой $m = E/c^2$. В нашем случае $m = 86 \text{ кг}$.

б) В каждом акте синтеза двух атомов дейтерия в гелий выделяется энергия

$$\epsilon = (2M_{\text{H}} - M_{\text{He}}) c^2 = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$$

$$(1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}),$$

т.е. в энергию превращается вещество массой $0,0155 \text{ а.е.м.}$ Но как раз два атома дейтерия входят в молекулу тяжелой воды, масса которой равна $20,0294 \text{ а.е.м.}$, поэтому можно сказать, что только $0,77 \cdot 10^{-3}$ часть тяжелой воды превращается в энергию. Отсюда следует, что годовое потребление тяжелой воды равно $M = (86/0,77) 10^3 \text{ кг}$, а ее ежесекундный расход $M/\tau = 3,5 \text{ г/сек}$ (τ — число секунд в году).

15.5. Если W — мощность солнечного излучения, поглощаемая каждым квадратным метром земной атмосферы, то энергия, выделяемая на Солнце в 1 сек , равна $E = 4\pi D^2 W$, где D — расстояние от Земли до Солнца. Следовательно, выделяемой в единицу времени энергии соответствует масса $m = E/c^2$. Реакция образования гелия из обычного водорода заключается в том, что четыре атома водорода ($m_{\text{H}} = 1,0081 \text{ а.е.м.}$) объединяются в атом гелия ($m_{\text{He}} = 4,0039 \text{ а.е.м.}$). Хотя при этом образуются две частицы с массой покоя, отличной от нуля, они в дальнейшем также превращаются в излучение (позитроны, встречаясь с электронами, «пропадают», образуя γ -кванты). Поэтому можно утверждать, что часть массы водорода

$$k = \frac{4m_{\text{H}} - m_{\text{He}}}{4m_{\text{H}}} = 7,1 \cdot 10^{-3}$$

отвечает энергии, выделившейся в результате реакции. Таким образом, в 1 сек на Солнце «сгорает» масса водорода

$$M = \frac{m}{k} = \frac{4\pi D^2 W}{kc^2} = 6,25 \cdot 10^8 \text{ т,}$$

что составляет примерно $3 \cdot 10^{-17}\%$ массы Солнца.

15.6. Сила и импульс в релятивистской механике связаны между собой таким же образом, как и в ньютоновской, $F = d(mv)/dt$, только масса в релятивистском случае не постоянна, а выражается через массу покоя как $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, т.е. зависит от скорости дви-

жения частицы. Итак,

$$F = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \right] \frac{dv}{dt} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt}.$$

Дифференцируя функцию $x(t)$, находим

$$v = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \text{ и } \frac{dv}{dt} = \frac{c^2 b^2}{(b^2 + c^2 t^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, действующая на частицу сила $F = m_0 c^2/b$ постоянна.

- 15.7. а) Единица длины *световой год* — это то расстояние, которое луч света проходит за один год; она равна ct , где $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек — скорость света, а $\tau = 3,15 \cdot 10^7$ — число секунд в году. Поэтому

$$g = 9,8 \frac{\tau}{c} \frac{\text{свет. год}}{\text{год}^2} = 1,03 \frac{\text{свет. год}}{\text{год}^2}.$$

- б) Сила тяжести, которую чувствуют космонавты, — это сила, прижимающая их к кораблю. Корабль, конечно, действует на них с такой же силой. Согласно условию задачи, эти силы постоянны и, таким образом, движение всех предметов внутри корабля — это движение под действием постоянной силы. Такое движение изучалось в предыдущей задаче. Поэтому, чтобы сразу использовать результаты этой задачи, представим силу в нашем случае в виде $F = m_0 c^2/b$. Константу b определим из условия $F = m_0 g$. Вычисления будем проводить в такой системе единиц, где расстояния измеряются *световыми годами*, а время — *годами*. В этой системе единиц скорость света равна 1 свет. год/год. Результаты вычислений дают

$$b = \frac{c^2}{g} = 0,97 \text{ свет. года};$$

скорость корабля в конце 5-го года движения

$$v = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \Big|_{t=5} = 0,98 \frac{\text{свет. год}}{\text{год}} = 0,98 \text{ c};$$

пройденное им расстояние

$$x = (\sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b^2)_{t=5} = 4,15 \text{ свет. года}.$$

К главе 16. Релятивистская энергия и релятивистский импульс

- 16.1. Рассмотрим систему координат x, y, z, t и штрихованную систему x', y', z', t' , движущуюся относительно исходной со скоростью u в положительном направлении оси x . Формулы, приведенные в решении задачи 15.1, для связи нештрихованных координат со штрихованными запишем в виде

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right),$$

где $\beta = u/c$, $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2}$. Беря дифференциалы от правых и левых частей этих соотношений, получаем преобразования Лоренца в дифференциальной форме:

$$dx = \gamma(dx' + \beta c dt'), \quad dy = du', \quad dz = dz', \\ dt = \gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c} dx'\right).$$

Разделив dx на dt , получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c dt'}{dt' + (\beta/c) dx'} = \frac{(dx'/dt') + \beta c}{1 + (\beta/c)(dx'/dt')}.$$

Но $dx/dt = v_x$ — скорость в неподвижной системе координат, а $dx'/dt' = v_{x'}$ — скорость в движущейся системе координат, поэтому

$$v_x = \frac{v_{x'} + u}{1 + uv_{x'}/c^2}.$$

Аналогично

$$v_y = \frac{v_{y'} \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv_{x'}/c^2}, \quad v_z = \frac{v_{z'} \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv_{x'}/c^2}.$$

Если $v_{x'} = 0$, то получаем формулу (16.7), приведенную в «Лекциях» (вып. 2, стр. 291) для v_y .

- 16.2. Чтобы найти величину скорости в движущейся системе координат, выразим дифференциалы штрихованных координат через дифференциалы нештрихованных координат:

$$dx' = \gamma(dx - \beta c dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma[dt - (\beta/c) dx].$$

Разделив dx' на dt' , найдем скорость в подвижной системе координат:

$$v_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}.$$

(Конечно, эту формулу можно написать сразу, изменив только знак скорости u в соответствующей формуле предыдущей задачи и поменяв местами v_x и $v_{x'}$.)

Вычислим дифференциал $dv_{x'}$:

$$dv_{x'} = \frac{1 - u^2/c^2}{(1 - uv_x/c^2)^2} dv_x.$$

Разделив $dv_{x'}$ на dt' и учитывая, что $a_{x'} = dv_{x'}/dt'$, а $a_x = dv_x/dt$, получим

$$a_{x'} = \frac{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}{(1 - uv_x/c^2)^3} a_x.$$

- 16.3. Из треугольника скоростей (см. «Лекции», вып. 2, стр. 294) следует, что скорости v , w и u связаны между собой соотношением $v^2 = u^2 + w^2(1 - u^2/c^2)$; поэтому

$$m_w = \frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - [u^2 + w^2(1 - u^2/c^2)]/c^2}}.$$

Чтобы доказать приведенную в тексте формулу, остается только внимательно проделать следующие выкладки:

$$\begin{aligned}\frac{m_w}{m_0} &= \frac{\sqrt{1 - (u^2 c^2 + w^2 c^2 - w^2 u^2)/c^4}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2(c^2 - w^2) - u^2(c^2 - w^2)}{c^2(c^2 - w^2)}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.\end{aligned}$$

- 16.4. Рассмотрим неупругое столкновение частиц в такой системе координат, в которой они налетали бы друг на друга с одинаковой скоростью w . Очевидно, эта система координат сама движется с той же скоростью w в направлении движущейся частицы. Так как в неподвижной системе скорость налетающей частицы равна $4c/5$, то

$$\frac{2w}{1 + w^2/c^2} = \frac{4c}{5}.$$

Мы могли бы решить это уравнение относительно w и убедиться, что $w = c/2$, но мы не будем этого делать, так как в § 3 гл. 16 «Лекций» (вып. 2, стр. 290) было показано, что в результате сложения двух скоростей по $c/2$ каждая получаем скорость, равную $4c/5$. Поэтому $w = c/2$.

В выбранной таким образом движущейся системе координат обрзовавшаяся составная частица неподвижна, а ее масса равна $M_0 = 2m_w = 4m_0/\sqrt{3}$. Таким образом, составная частица с массой покоя M_0 движется в исходной системе координат со скоростью $c/2$.

- 16.5. В системе координат, в которой протоны ускорителя и мишени налетают друг на друга с одинаковыми скоростями, скорость протонов w определяется из следующего условия: $2m_p/\sqrt{1 - w^2/c^2} = 4m_p$, откуда $w = \sqrt{3} c/2$. Скорость протонов в лаб. системе координат (в этой системе частицы мишени покоятся) равна

$$v = \frac{2w}{1 + w^2/c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} c$$

Кинетическая энергия налетающих протонов есть разность между их полной энергией и энергией покоя, т. е.

$$E_{\text{кин}} = (m_{0p} - m_p) c^2 = 6 m_p c^2 \approx 5630 \text{ Мэв} = 5,63 \text{ Гэв}.$$

К главе 17. Пространство-время

- 17.1. Из соотношения между энергией и импульсом $E^2 - p^2 = m_p^2$ (в системе единиц, где $c = 1$) следует, что $E \approx p$, так как E и p намного больше m_p . Из определения же релятивистского импульса частицы находим

$$v^2 = \frac{1}{1 + (m_p/p)^2} \approx 1 - \left(\frac{m_p}{p}\right)^2 = 1 - 10^{-20}$$

(здесь учтено, что $m_p/p \ll 1$ и использована приближенная формула $1/(1+x) \approx 1-x$). Таким образом, скорость протона такой большой энергии отличается от скорости света только в 20-м знаке! Поэтому,

с точки зрения земного наблюдателя, такой протон пересечет Галактику по диаметру за 10^5 лет. С точки зрения протона такое путешествие займет всего

$$\tau = \frac{10^5 \text{ лет}}{\sqrt{1 - v^2}} \approx 10^{-5} \text{ лет} \approx 315 \text{ сек} \approx 5 \text{ мин.}$$

- 17.2. Здесь нужны только вычисления. Масса покоя электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$, поэтому $m_e c^2 = 81,99 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$. Посмотрев в справочник, можно убедиться, что $1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, так что

$$m_e c^2 = \frac{81,99}{1,6} \cdot 10^4 \text{ эв} = 0,511 \text{ Мэв.}$$

- 17.3. Из закона сохранения импульса следует, что трехмерные импульсы μ -мезона p_μ и нейтрино p_ν равны по величине и направлены в противоположные стороны. Из закона сохранения энергии вытекает, что сумма полной энергии мезона и нейтрино равна энергии покоя μ -мезона, т. е. $E_\nu + E_\mu = m_\pi$ (в системе единиц, где $c = 1$).

Так как $E_\nu = p_\nu$ (масса покоя нейтрино равна нулю) и

$$E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2}, \text{ то } \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} + p_\mu = m_\pi.$$

Отсюда

$$p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29,8 \text{ Мэв.}$$

Кинетическую энергию μ -мезона найдем как разность его полной энергии и энергии покоя:

$$T_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} - m_\mu = 4,1 \text{ Мэв.}$$

Кинетическая энергия нейтрино равна его полной энергии и равна импульсу:

$$T_\nu = E_\nu = p_\nu = 29,8 \text{ Мэв.}$$

- 17.4. В задаче 12.14 было показано, что заряженная частица в магнитном поле B движется по окружности радиусом R , причем $R = mv/qB$. Этот результат сохраняется и в релятивистском случае, поскольку при таком движении меняется только направление скорости, а не ее величина.

Так как $mv = p$, то $p = qBR$. Здесь q измеряется в кулонах, B — в вебер/м², R — в метрах, а p — в кг·м/сек. Учитывая, что $1 \text{ вебер/м}^2 = 10^4 \text{ гс}$, заряд частицы равен $q = Ze$, а $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ кулон}$ и $1 \text{ кг} \cdot \text{м/сек} = (1,6/c) \cdot 10^{-25} \text{ Мэв}$, получаем $p = 3 \cdot 10^{-2} ZBR$. В этой формуле единицы измерения физических величин следующие: $[P]$ — Мэв, $[B]$ — гауссы, $[R]$ — метры, Z — безразмерная величина.

- 17.5. а) Радиус магнита циклотрона должен быть не меньше радиуса кривизны траектории частицы предельной энергии в данном магнитном поле. Используя результаты предыдущей задачи, имеем $R = 10^2 p / 3ZB$. Импульс релятивистской частицы равен $\sqrt{E^2 - m_0^2}$, а ее полная энергия E есть сумма кинетической энергии T и энер-

гии покоя m_0 : $E = T + m_0$, поэтому

$$\rho = \sqrt{T(T + 2m_0)} \quad \text{и} \quad R = \frac{\sqrt{T(T + 2m_0)}}{3ZB} \cdot 10^2 \text{ м} = 1,85 \text{ м}.$$

- б) Частота ускоряющего электрического поля должна совпадать с частотой обращения частицы (см. задачу 12.15), т. е.

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi m}{3 \cdot 10^{-2} ZB}.$$

В этом выражении m измеряется в Мэв, B — в гауссах, а время — в метрах. Таким образом, частота ускоряющего поля в конце ускорения равна

$$\nu = \frac{3 \cdot 10^{-2} ZB}{2\pi m} \text{ с сек}^{-1}.$$

Но $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2}$, а

$$v = \frac{\rho}{E} = \frac{\sqrt{T(T + 2m_0)}}{T + m_0} = \frac{1}{2},$$

так что $m = 2m_0 / \sqrt{3}$ и, следовательно,

$$\nu = 0,13 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}.$$

- в) В начале ускорения частиц частота электрического поля должна быть

$$\nu_0 = \frac{3 \cdot 10^{-2} ZB}{2\pi m_0} \text{ с сек}^{-1},$$

поэтому изменение частоты в процессе ускорения равно

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 13\%.$$

К главе 18. Двумерные вращения

- 18.1. а) По определению момента силы $\tau = xF_y - yF_x = 140$ ньютон·м. Но момент мы можем представить также в виде

$$\tau = F \cdot \rho = F_t \cdot r,$$

где ρ — плечо силы, а F_t — тангенциальная (перпендикулярная r) составляющая силы. Из этих двух равенств находим

б)

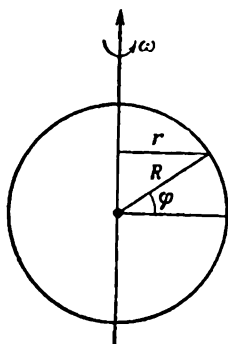
$$\rho = \frac{\tau}{F} = 2,8 \text{ м}.$$

в)

$$F_t = \frac{\tau}{r} = \frac{\tau}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 14 \text{ ньютон}.$$

- 18.2. За счет суточного вращения Земли каждая точка земной поверхности приобретает зависящую от широты φ скорость $v = \omega r = \omega R \cos \varphi$ (см. рисунок), где ω — угловая скорость вращения Земли.

В Лос-Анджелесе ($\varphi_0 = 34^\circ$, см. географическую карту) $v_0 = \omega R \cos \varphi_0$. Широту искомой точки земной поверхности найдем из уравнения



$$R\omega \cos \varphi_0 - R\omega \cos \varphi = 200,$$

откуда

$$\cos \varphi = 0,395, \quad \varphi = 66^\circ 40'.$$

- 18.3. Найдем сначала проекции силы на оси координат (ось y направим вверх по прямой OP , а ось x — направо по AB). Так как в равновесии сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, имеем

$$F_x + 50 - \frac{50}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$F_y + 50 - \frac{50}{\sqrt{2}} = 0,$$

т. е.

$$F_x = F_y = -50 \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = -14,6 \text{ н.}$$

Учтем теперь, что полный момент силы (будем вычислять его относительно точки O) также должен равняться нулю. Прежде всего ясно, что точка приложения силы F должна лежать слева от точки O ; необходимо, чтобы сила F вращала пластинку против часовой стрелки. Приравнявая нулю полный момент сил, найдем l — расстояние от точки O до точки приложения силы F :

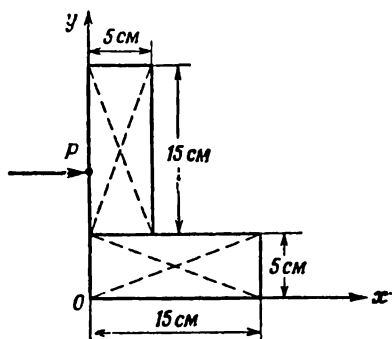
$$F_y \cdot l - 0,1 \cdot 50 = 0, \quad l = \frac{5}{F_y} = 0,34 \text{ м.}$$

Таким образом, удерживающая сила величиной $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx 20,5 \text{ н}$ приложена левее точки O на $0,34 \text{ м}$ и направлена параллельно силе, приложенной в точке O .

- 18.4. Уголок не вращается после удара в том случае, если удар произведен по линии, проходящей через его ц.м. (момент количества движения относительно ц.м., переданный при ударе, в этом случае ра-

вен нулю). Поэтому $OP = y_c$, где y_c — ордината центра масс. Поскольку толщина горизонтальной и вертикальной сторон уголка постоянна, центры масс сторон уголка совпадают с x геометрическими центрами. Как видно из рисунка, ордината центра масс горизонтальной стороны $y_1 = 2,5$ см, а вертикальной $y_2 = 12,5$ см. Ординату центра масс всего уголка найдем по формуле

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 + y_2}{2} = 7,5 \text{ см.}$$



18.5. Условия равновесия всей фермы в целом таковы:

$$F_1 + F_2 = W \quad \text{и} \quad F_1 l - F_2 l = 0$$

(l — длина одного стержня). Отсюда

$$F_1 = \frac{W}{3} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{2W}{3}.$$

Стержень GF испытывает сжатие, а EG — растяжение. Их нагрузки равны соответственно T_1 и T_2 . Но $F_2/T_1 = \cos 30^\circ$, откуда

$$T_1 = \frac{4W}{3\sqrt{3}}.$$

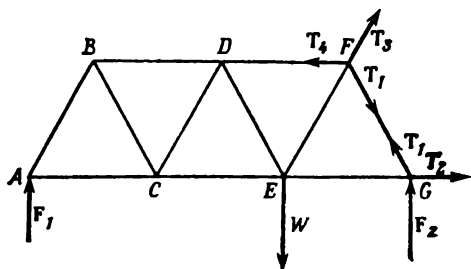
Из равновесия в узле F имеем $T_1 + T_3 + T_4 = 0$ (T_3 и T_4 — напряжения в стержнях EF и DF). Проецируя это равенство на вертикальную ось, получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} T_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad T_1 = T_3.$$

Приравнявая затем нулю сумму проекций на горизонтальную ось находим

$$T_4 = 2T_1 \cos 60^\circ = \frac{4W}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, стержень FD сжат, его напряжение $4W/3\sqrt{3}$.



- 18.6. а) Момент инерции стержня в системе координат, ось x которой направлена вдоль стержня, а начало совпадает с концом стержня, равен

$$J = \int_0^L x^2 dm = \rho \int_0^L x^2 dx,$$

где ρ — его линейная плотность ($\rho = M/L$), так что

$$J = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2.$$

- б) Если ось проходит не через конец стержня, а через его середину, то вычисление интеграла из п. (а) следует проводить в пределах не от 0 до L , а от $-L/2$ до $L/2$:

$$J_0 = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2.$$

Этот же результат можно получить из теоремы о параллельном переносе оси, относительно которой вычисляется момент инерции: $J = J_{ц.м} + md^2$ (d — расстояние между осями, а $J_{ц.м}$ — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс). Искомый момент инерции есть как раз $J_{ц.м}$, так как центр масс стержня находится на середине L . Следовательно,

$$J_0 = J_{ц.м} = J - Md^2 = \frac{1}{3} ML^2 - \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{12} ML^2.$$

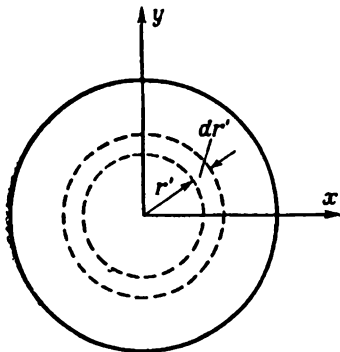
- в) Если цилиндр тонкостенный, то вся его масса M находится на расстоянии r от оси вращения, поэтому, согласно определению момента инерции, $J = Mr^2$.
- г) Для вычисления момента инерции сплошного цилиндра разобьем его на большое число тонкостенных полых цилиндров. На рисунке показан один такой цилиндр радиусом r' и толщиной dr' . Момент инерции этого цилиндра [см. п. (в)] $dJ = r'^2 dm'$, где

$$dm' = \frac{M}{\pi r^2 H} 2\pi r' H dr' = \frac{2M}{r^2} r' dr'$$

(M — масса цилиндра, H — высота цилиндра).

Момент инерции сплошного цилиндра вычисляется как сумма моментов инерции составляющих его тонкостенных цилиндров, т. е.

$$J = \int_0^r dJ = \frac{2M}{r^2} \int_0^r r'^3 dr' = \frac{1}{2} Mr^2.$$



- 18.7. Когда цилиндр поворачивается на угол φ против часовой стрелки, груз опускается на расстояние $r\varphi$, поэтому линейное ускорение груза a связано с угловым ускорением цилиндра $d^2\varphi/dt^2$ соотношением

$$a = \frac{d^2}{dt^2} (r\varphi) = r \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вращение цилиндра описывается уравнением

$$\frac{dL}{dt} = \tau,$$

или

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \tau = Tr.$$

Здесь $L = J(d\varphi/dt)$, J — момент инерции цилиндра, T — натяжение нити. Учитывая, что $J = Mr^2/2$, получаем

$$\frac{1}{2} Ma = T.$$

Складывая это уравнение с уравнением движения груза:

$$ma = mg - T,$$

находим

$$a = \frac{m}{m + M/2} g.$$

- 18.8. а) Совместим начало координат с отверстием на столе, а одну из координатных плоскостей, например xy , — с плоскостью стола. В этой системе координат момент внешних сил равен нулю, поэтому момент количества движения груза сохраняется: $mr_1v_1 = mr_2v_2$. Отсюда скорость груза в конечном состоянии

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1.$$

- б) Работа внешней силы равна изменению кинетической энергии груза; следовательно,

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2}.$$

- в) Пусть $F(r)$ — сила, которую необходимо приложить к нити, чтобы удержать шарик на расстоянии r . При виртуальном перемещении dr эта сила выполняет работу [см. п. (б)]

$$F(r) dr = \frac{mv^2}{2} \frac{[(r + dr)^2 - r^2]}{r^2} = \frac{mv^2}{r} dr$$

[здесь мы пренебрегли членом $\sim (dr)^2$]. Сокращая dr , получаем $F(r) = mv^2/r$, что, конечно, и следовало ожидать.

- 18.9. Момент количества движения планеты является суммой двух членов: $L_1 + L_2$; L_1 связан с движением планеты по орбите ($L_1 = mvR$), а L_2 — с ее вращением вокруг своей оси ($L_2 = J\omega$). Учитывая, что для движения по круговой орбите $v^2/R \sim GM/R^2$ (считаем, что центральное тело очень тяжелое), получаем

$$L_1 = m \sqrt{GMR}.$$

Величина L_2 для всех реальных случаев оказывается гораздо меньше L_1 .

Рассмотрим теперь систему Земля — Луна. Момент количества движения этой системы определяется следующими видами движения: движением Луны относительно ц.м. системы Земля — Луна, вращением Луны вокруг своей оси, движением Земли относительно ц.м. системы и вращением Земли вокруг своей оси.

Вспомним теперь, что период вращения Луны вокруг своей оси равен периоду ее движения по орбите. Следовательно,

$$\frac{L_{1Л}}{L_{2Л}} = \frac{m_Л R^2}{I_Л} \sim \frac{R^2}{r_Л^2},$$

где R — радиус лунной орбиты, а $r_Л$ — радиус Луны. Таким образом, $L_{1Л} \gg L_{2Л}$, и этой последней величиной можно пренебречь. Далее, поскольку периоды обращения Земли и Луны вокруг центра масс системы одинаковы, а расстояние до него обратно пропорционально массам, имеем

$$L_{1З} = \frac{m_Л}{m_З} L_{1Л} \approx 5 \cdot 10^{-3} L_{1Л},$$

т. е. вклад орбитального движения Земли в момент количества движения также очень мал. Оценим теперь вклад от вращения Земли вокруг своей оси. Имеем

$$L_{2З} = I_З \omega_З = \frac{2}{5} m_З r_З^2 \omega_З.$$

Учитывая, что $m_З \approx 80 m_Л$, $r_З \approx 6 r_Л$, $\omega_З = \omega_Л / 28$, убеждаемся, что

$$\frac{L_{2З}}{L_{1Л}} \approx 0,1.$$

Следовательно, момент количества движения системы Земля — Луна равен приблизительно (считаем, что ось вращения Луны перпендикулярна плоскости ее орбиты):

$$L = L_{1Л} + L_{2З} = m_Л \sqrt{G m_З R} + I_З \omega_З.$$

Из-за приливов, тормозящих вращение Земли, длина суток медленно увеличивается, т. е. уменьшается угловая скорость вращения, а с ней и момент количества движения Земли $L_{2З}$. Так как полный момент количества движения системы Земля — Луна должен оставаться постоянным, момент количества движения Луны $L_{1Л}$ должен медленно возрастать, компенсируя уменьшение $L_{2З}$.

Увеличение $L_{1Л}$ (см. выражение для этой величины) возможно только в случае увеличения расстояния между Луной и Землей.

Энергия системы Земля — Луна состоит из кинетической и потенциальной энергий орбитального движения Луны и кинетической энергии вращения Земли (мы опять пренебрегли кинетической энергией вращения Луны и движения Земли по орбите как малыми величинами).

Как следует из решения задачи 14.18, полная энергия Луны равна

$$- \frac{G m_З m_Л}{2R}.$$

а энергия вращения Земли вокруг своей оси

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = 0,2 m_3 r_3^2 \omega_3^2.$$

Полная энергия рассматриваемой системы

$$0,2 m_3 r_3^2 \omega_3^2 - \frac{G m_3 m_L}{2R}$$

положительна, в чем можно убедиться, подставив вместо букв соответствующие числа. В предельном случае (далеком будущем), когда Земля полностью перестанет вращаться вокруг своей оси ($\omega_3 = 0$), полная энергия системы Земля—Луна станет отрицательной ($-Gm_3 m_L / 2R_0$, где R_0 —расстояние между Луной и Землей при $\omega_3 = 0$) или, в крайнем случае, при $R_0 \rightarrow \infty$ обратится в нуль. Это означает, что полная механическая энергия системы Земля—Луна уменьшается по мере удаления Луны от Земли. Это и понятно, ведь часть механической энергии вследствие приливного трения превращается в теплоту.

- 18.10. Когда подвешиваются грузы W_1 и W_2 , силы, действующие в шарнирных соединениях AA' и BB' , изменяются. Нас будут интересовать только эти добавки. Силы, которые действовали в шарнирных соединениях раньше, как раз такие, чтобы рама с грузом W_c оставалась в равновесии, поэтому, рассматривая только добавки, мы можем не учитывать ни веса рамы, ни груза W_c . Выясним условие равновесия планки AB . Суммарный момент силы, действующей на эту планку,

$$F_A \cdot AP - F_B \cdot PB = 0.$$

Здесь F_A и F_B —вертикальные составляющие силы в шарнирах A и B (момент горизонтальных составляющих сил равен нулю). Аналогично

$$F_{A'} \cdot A'P' - F_{B'} \cdot P'B' = 0.$$

Складывая эти уравнения, находим

$$(F_A + F_{A'}) \cdot AP = (F_B + F_{B'}) \cdot PB.$$

Из условия равновесия углов ACD и BGH имеем

$$F_A + F_{A'} = W_1,$$

$$F_B + F_{B'} = W_2,$$

откуда

$$W_2 = \frac{AP}{PB} W_1 = 0,25 \text{ кг}.$$

- 18.11. По условию задачи машина должна отключаться, когда AC достигнет значения $\sim \sqrt{2} \cdot 30 \text{ см}$, т. е. когда угол $\alpha = 45^\circ$. В системе координат, вращающейся вместе с регулятором, массы M находятся в равновесии. На каждую из них действует центробежная псевдосила F и реакции стержней T_1 и T_2 (направление сил показано на рисунке).

Используем условие равновесия массы M . Из равенства нулю суммы горизонтальных составляющих сил получаем

$$F = \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}}.$$

Из равенства нулю суммы вертикальных составляющих сил:

$$Mg = \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}}.$$

Наконец, условие равновесия массы C записывается в виде

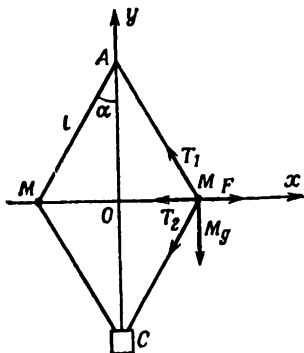
$$mg = \sqrt{2} T_2.$$

Из этих трех уравнений находим

$$F = (M + m)g \quad \text{или} \quad 4\pi^2 n^2 M \frac{l}{\sqrt{2}} = (M + m)g.$$

Таким образом,

$$M = \frac{g}{2\sqrt{2}\pi^2 n^2 l - g} m \approx 1,7 \text{ кг.}$$



- 18.12. Мощность, необходимая для вращения вала, равна мощности сил трения, т. е.

$$P = F_{\text{тр}} v,$$

где v — скорость масс m , $v = \omega r$.

Сила трения каждой колодки равна произведению коэффициента трения на величину силы, прижимающей колодку к цилиндру, т. е.

$$F_{\text{тр}} = \mu m \omega^2 r.$$

Таким образом,

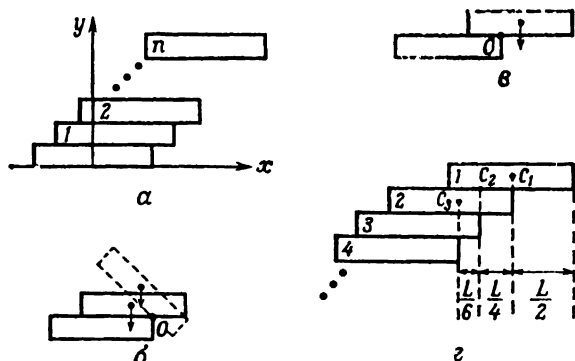
$$P = \mu m \omega^3 r^2.$$

- 18.13. Поместим начало системы координат в середину основания нижнего бруска. Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n$ координаты центров масс соответствующих брусков (см. фиг. а). Очевидно, что сооружение из брусков опрокинется, когда координата x_0 центра масс всей системы брусков, лежащих на нижнем бруске, выйдет за его основание, т. е. когда $x_0 \geq L/2$ (знак равенства соответствует неустойчивому равновесию).

Поясним это, рассмотрев условие равновесия двух брусков, установленных друг на друге. Пусть сначала бруски расположены так,

как это показано на фиг. 6. Повернем верхний брусок относительно точки O на малый угол $\Delta\phi$ по часовой стрелке и отпустим его. Как будет двигаться брусок дальше?

Сила веса бруска создает относительно точки O вращающий момент $\tau = mg[(L/2) - l]$ (m — масса бруска, l — длина выступающей части торца), который стремится повернуть брусок в исходное положение. Это и означает, что в положении, показанном на фиг. 6,



брусок находится в равновесии. По мере стремления l к $L/2$ величина вращающего момента убывает. Наконец, $\tau = 0$ при $l = L/2$. Теперь достаточно отклонить верхний брусок на бесконечно малый угол, чтобы брусок начал вращаться по часовой стрелке; это означает, что верхний брусок находится в положении неустойчивого равновесия. Разумеется, при $l > L/2$ (см. фиг. 6) возникает вращающий момент $\tau = mg(l - L/2)$, опрокидывающий верхний брусок.

Вычислим координаты центра масс всех брусков, лежащих на нижнем. Очевидно,

$$x_1 = \frac{L}{a}, \quad x_2 = 2 \frac{L}{a}, \quad \dots, \quad x_n = n \frac{L}{a}.$$

Следовательно, координата центра масс системы этих брусков равна

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) = \\ &= \frac{1}{n} \frac{L}{a} (1 + \dots + n) = \frac{1}{n} \frac{L}{a} \frac{n+1}{2} n = (n+1) \frac{L}{2a}. \end{aligned}$$

Неустойчивое равновесие наступит при $x_0 = L/2$, откуда

$$n = a - 1.$$

Следовательно, максимальное число брусков, которые можно уложить указанным способом, равно a .

Рассмотрим теперь очень интересный случай, когда длина свешивающейся части бруска не постоянна, а зависит от его положения в кладке. Начнем рассмотрение с самого верхнего бруска.

Как мы выше установили, для того чтобы верхний брусок не опрокинулся, он может быть сдвинут относительно нижнего бруска самое большее на длину $L/2$ (см. рис. 2). Чтобы два верхних бруска не упали, их общий центр масс C_2 не должен выступать дальше, чем

на $L/2$ от конца третьего бруска и т. д. Найдем, на какую длину x второй брусок может быть сдвинут относительно третьего.

Поместим начало системы координат над торцом третьего бруска и направим ось x вправо. Тогда для положения центра масс двух верхних брусков $x^{(2)}$ имеем

$$x^{(2)} = \frac{m_1 x + m_2 (x - L/2)}{m_1 + m_2} = x - \frac{L}{4}.$$

На пределе равновесия $x^{(2)} = 0$, поэтому $x = L/4$.

Поместим теперь начало координат над торцом четвертого бруска. Считая, что третий брусок выступает от торца четвертого бруска на расстояние y , находим для ц. м. трех брусков:

$$x^{(3)} = \frac{(m_1 + m_2) y + m_3 (y - L/2)}{m_1 + m_2 + m_3} = y - \frac{L}{6}.$$

Из условия $x^{(3)} = 0$ имеем $y = L/6$.

По способу вычисления $x^{(3)}$ ясно, что от торца предыдущего бруска четвертый брусок будет выступать на $L/8$, пятый — на $L/10$ и т. д. Сколько бы брусков мы ни складывали, величина их взаимного смещения не обращается в нуль, т. е. такая кладка содержит бесконечное число брусков.

Максимальное расстояние S , на которое выступает самый верхний брусок над самым нижним, равно

$$S = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{6} + \frac{L}{8} + \dots = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right),$$

причем число членов суммы бесконечно.

Сравним два ряда:

$$\Sigma_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

и

$$\Sigma_2 = 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Сумма Σ_2 заведомо бесконечно велика (это видно из самой конструкции ряда); в то же время каждый ее член не больше соответствующего члена Σ_1 , следовательно, сумма Σ_1 тем более расходится. Но Σ_1 и есть сумма, стоящая в выражении для S ; значит, верхний брусок смещен на бесконечно большое расстояние относительно нижнего.

К главе 19. Центр масс; момент инерции

19.1. Энергия, затраченная механизмом K , равна изменению кинетической энергии вращения системы, т. е.

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2,$$

где I_0 и I_1 — моменты инерции «квадратной» и «крестообразной» систем, а ω_1 — конечная угловая скорость вращения. Момент инерции

системы складывается из моментов инерции стержней и момента инерции внутреннего механизма.

Пользуясь теоремой о параллельном переносе оси, находим, что момент инерции одного стержня относительно оси O равен в начальном состоянии $(\frac{4}{3})ML^2$, а в конечном $(\frac{1}{3})ML^2$. Поэтому

$$I_0 = \frac{32}{3} ML^2 + \frac{40}{3} ML^2 = 24ML^2$$

и

$$I_1 = \frac{8}{3} ML^2 + \frac{40}{3} ML^2 = 16ML^2.$$

Конечную угловую скорость вращения ω_1 находим из закона сохранения момента количества движения (механизм, складывающий стержни, — внутренний!)

$$I_1 \omega_1 = I_0 \omega_0,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 = \frac{3}{2} \omega_0.$$

Таким образом, затраченная механизмом K энергия равна

$$E = \frac{9}{8} I_1 \omega_0^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = 6ML^2 \omega_0^2.$$

- 19.2. а) Пусть нить закручена на угол θ . Чтобы удерживать ее в этом положении, к нити нужно приложить внешние силы, момент которых τ был бы равен упругому моменту нити с обратным знаком, т. е. $\tau = k\theta$.

При дальнейшем закручивании нити на малый угол $\Delta\theta$, как было показано в гл. 18 «Лекций» (вып. 2, стр. 320), внешние силы совершают работу $\Delta W = \tau \cdot \Delta\theta$. Нить, закрученная на фиксированный угол θ_0 , обладает, таким образом, потенциальной энергией U , равной по величине работе внешних сил, поворачивающих нить от ненапряженного состояния ($\theta = 0$) до угла θ_0 , т. е.

$$U = \int_0^{\theta_0} \tau d\theta = \int_0^{\theta_0} k\theta d\theta = \frac{1}{2} k\theta_0^2.$$

- б) В момент разряда конденсатора на рамку действует момент $\tau = nAB|dq/dt|$, в результате чего рамка начнет вращаться с угловой скоростью $\omega = L/I$, где L — момент количества движения рамки, I — ее момент инерции. Величину L найдем, интегрируя уравнение

$$\frac{dL}{dt} = nAB \left| \frac{dq}{dt} \right|$$

от $t = 0$ до момента окончания разряда конденсатора, что дает $L = nABq_0$ (q_0 — первоначальный заряд конденсатора). Когда катушка отклоняется на максимальный угол и останавливается, начальная кинетическая энергия рамки

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{n^2 A^2 B^2 q_0^2}{2I}$$

переходит в потенциальную энергию некоторого устройства, позволяющего катушке совершать крутильные колебания. Независимо от конкретного механизма этого устройства (то ли катушка висит на нити, то ли на ее ось насажены какие-то пружинки и т. п.) его потенциальная энергия в любом случае равна $k\theta^2/2$. Поэтому

$$\frac{1}{2} k \theta_{\max}^2 = \frac{n^2 A^2 B^2 q_0^2}{2I}, \quad \text{откуда} \quad \theta_{\max} = \frac{nABq_0}{\sqrt{kI}},$$

т. е. максимальный угол поворота рамки пропорционален начальному заряду конденсатора.

- 19.3. Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее частей. Поэтому момент инерции проволоки, вычисленный относительно оси, проходящей через точку A , не зависит от угла θ и равен $ML^2/12$.

- 19.4. Для моментов инерции пластинки относительно осей, проходящих через точки A и B , можем написать

$$I_A = I_C + Mr_1^2, \quad I_B = I_C + Mr_2^2,$$

откуда

$$I_B = I_A - Mr_1^2 + Mr_2^2 = I_A + M(r_2^2 - r_1^2).$$

Приведенное в условии задачи равенство выполняется, если $r_3^2 = r_2^2 - r_1^2$, т. е. когда r_1 , r_2 и r_3 образуют прямоугольный треугольник, причем гипотенузой является r_2 .

- 19.5. Объем тела вращения равен произведению длины окружности, описываемой центром масс плоской фигуры при вращении, на площадь этой фигуры. В нашем случае

$$V = 2\pi R \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 R^3,$$

так как центр масс однородного круга лежит в его геометрическом центре.

- 19.6. Энергия, затрачиваемая на достижение данной угловой скорости ω_0 из неподвижного состояния, равна кинетической энергии вращающегося тела. Эта энергия тем меньше, чем меньше момент инерции тела (значение ω_0 фиксировано!).

Для любого тела $I = I_{ц.м} + Md^2$, где $I_{ц.м}$ — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; d — расстояние от этой оси до параллельной ей оси вращения. Очевидно, что минимальному значению момента инерции отвечает $d = 0$. Таким образом, ось вращения должна проходить через центр масс, который находится на расстоянии $M_2 L / (M_1 + M_2)$ от того конца невесомого стержня, на котором закреплена масса M_1 .

- 19.7. Пусть диск с прижатыми грузиками вращается с угловой скоростью ω_0 . Его момент количества движения L_0 равен $[MR^2/2 + 2mR^2] \cdot \omega_0$.

В момент срыва нитей с крючков H и H' диск вращается с угловой скоростью ω_1 , определяемой из закона сохранения момента количества движения:

$$\left(\frac{MR^2}{2} + 2mR^2 \right) \omega_0 = \left[\frac{MR^2}{2} + 2m(R+l)^2 \right] \omega_1.$$

т. е.

$$\omega_1 = \frac{MR^2 + 4mR^2}{MR^2 + 4m(R+l)^2} \omega_0.$$

После отделения грузиков диск продолжает вращаться с той же угловой скоростью ω_1 , так что угловая скорость диска уменьшается в n раз, если

$$\frac{MR^2 + 4mR^2}{MR^2 + 4m(R+l)^2} = \frac{1}{n}, \quad \text{т. е.} \quad l = R \left[\sqrt{n + \frac{M}{4m}(n-1)} - 1 \right].$$

- 19.8. В неподвижной системе координат x, y на тело действует сила F . Тело будет двигаться в этой системе координат в соответствии с уравнениями движения $m\ddot{x} = F_x$ и $m\ddot{y} = F_y$. При повороте системы координат на угол $\theta = \omega t$ координаты преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} \cos \omega t - x\omega \sin \omega t + \dot{y} \sin \omega t + y\omega \cos \omega t, \\ \ddot{x}' &= \ddot{x} \cos \omega t + \ddot{y} \sin \omega t - 2\dot{x}\omega \sin \omega t + \\ &+ 2\dot{y}\omega \cos \omega t - x\omega^2 \cos \omega t - y\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= -\dot{x} \sin \omega t - x\omega \cos \omega t + \dot{y} \cos \omega t - y\omega \sin \omega t, \\ \ddot{y}' &= -\ddot{x} \sin \omega t + \ddot{y} \cos \omega t - 2\dot{x}\omega \cos \omega t - 2\dot{y}\omega \sin \omega t + \\ &+ x\omega^2 \sin \omega t - y\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Компоненты силы в штрихованной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} F'_x &= m\ddot{x}' = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta + 2m\dot{y}'\omega + m\omega^2 x', \\ F'_y &= m\ddot{y}' = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta - 2m\dot{x}'\omega + m\omega^2 y'. \end{aligned}$$

Первые два члена в каждом выражении являются компонентами истинной силы F в повернутой системе координат, третьи слагаемые — компонентами силы Корнолиса, и последние — центробежной силы.

Из выражения для компонент центробежной силы мы видим, что по величине она равна $m\omega^2 r'$ и направлена по радиусу-вектору частицы. Сила Кориолиса равна $2m\omega \sqrt{\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2} = 2m\omega v'$, т. е. она пропорциональна скорости и направлена перпендикулярно вектору скорости, поскольку $F_K \cdot v' = 0$.

- 19.9. Уравнение движения для центра масс шара записывается в виде

$$Ma = -\mu g M,$$

откуда $a = -\mu g$ и $v_{ц.м} = v - \mu g t$ (v — начальная скорость шара).
Для вращательного движения

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mu g M R.$$

Поскольку $I = 2MR^2/5$ (см. «Лекции», вып. 2, стр. 338, только в приведенной там таблице «сферу» нужно заменить «шаром»), имеем

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{\mu g t}{R}.$$

Скорость той точки шара, которая соприкасается с плоскостью, равна $v_{ц.м.} - \omega R$. Когда эта скорость обращается в нуль, шар начинает катиться без проскальзывания. Это произойдет через промежуток времени t_k от начала движения, равный

$$t_k = \frac{2}{7} \frac{v}{\mu g}.$$

Расстояние, пройденное шаром за это время,

$$S = vt_k - \frac{1}{2} at_k^2 = \frac{12}{49} \frac{v^2}{\mu g},$$

а его скорость к этому моменту $v_{t_k} = v - \mu g t_k = 5v/7$.

- 19.10. Вес W валика разложим на две составляющие: силу нормального давления его на вал P , равную $F_1 = Mg \sin \theta$, и перпендикулярную к ней $F_2 = Mg \cos \theta$.

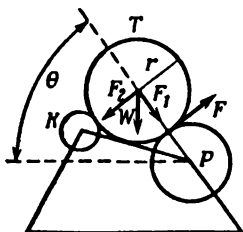
Контакт между передающим валиком T и барабаном K не будет теряться в том случае, если «сила тяги» F , приложенная со стороны печатного вала P к валику T (как раз и обуславливающая вращение валика T), меньше или равна F_2 , т. е.

$$F \leq Mg \cos \theta$$

(знак равенства соответствует нулевому давлению T на K).

Уравнение вращательного движения для валика T , когда он не давит на барабан K , имеет вид $IA_1 = Fr$, или $(Mr^2/2A_1 = Mgr \cos \theta$ (здесь через $A_1 = d\omega/dt$ обозначено угловое ускорение валика T), так как

$$I = \frac{1}{2} Mr^2, \quad \text{откуда} \quad A_1 = \frac{2g}{r} \cos \theta.$$



Линейные ускорения точек обода T и P одинаковы, так что $A_1 r = AR$, откуда (A — угловое ускорение вала P)

$$A = A_1 \frac{r}{R} = \frac{2g}{R} \cos \theta,$$

где R — радиус вала P .

- 19.11. Обозначим массу первой секции через m , тогда массы соответствующих квадрантов равны

$$m_1 = m, \quad m_2 = 2m, \quad m_3 = 3m \quad \text{и} \quad m_4 = 4m.$$

Поскольку каждая из секций однородна, то центры масс их расположены одинаково относительно самих секций. Если координаты центров масс секций $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$, то положение центра масс всего тела вычисляется по формулам

$$X = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4}{10} \quad \text{и} \quad Y = \frac{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4}{10}.$$

Из соображений симметрии ясно, что центры масс каждой из секций лежат на биссектрисе соответствующего прямого угла на одинаковых расстояниях от начала координат.

Обозначим координаты центра масс первой секции через a :

$$x_1 = y_1 = a.$$

Очевидно, в этом случае

$$x_2 = a, \quad y_2 = -a,$$

$$x_3 = -a, \quad y_3 = a,$$

$$x_4 = -a, \quad y_4 = -a.$$

Таким образом,

$$X = -0,4a. \quad Y = -0,2a.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки (O, O) и (X, Y) , записывается в виде

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y},$$

откуда получаем искомое уравнение

$$y = \frac{1}{2} x.$$

- 19.12. Пусть M — масса диска с отверстием, m — масса вырезанной части диска, x — абсцисса центра масс диска с отверстием. Поскольку центр масс сплошного диска расположен в его центре, то

$$\frac{Mx - m(R/2)}{M + m} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{m}{2M} R = \frac{1}{2} \frac{(R/2)^2}{R^2 - (R/2)^2} R = \frac{1}{6} R = 1,67 \text{ см.}$$

- 19.13. Выберем систему координат, как рекомендовано в условии задачи. Так как проволока расположена симметрично относительно оси x , то, очевидно, $y_{ц.м} = 0$. По определению центра масс

$$x_{ц.м} = \frac{\int x dm}{\int dm};$$

эта формула является обобщением приведенной в «Лекциях» формулы

$$x_{ц.м} = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}.$$

Масса проволоки бесконечно малой длины dl равна ρdl , где $\rho = M/L$ — масса единицы длины проволоки, поэтому

$$x_{ц.м} = \frac{1}{L} \int x dl.$$

Вычислять такой интеграл в прямоугольной системе координат довольно громоздко. Эти вычисления значительно упрощаются, если заметить, что для произвольной точки проволоки, радиус-вектор

которой образует угол φ с осью y , $x = R \sin \varphi$, а $y = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$ (см. рисунок). Чтобы учесть все точки проволоки, угол φ должен пробегать значения от $(\pi - \alpha)/2$ до $(\pi + \alpha)/2$, где $\alpha = L/R$ — угол между радиусами-векторами концов проволоки.

Таким образом,

$$x_{ц. м} = \frac{R^2}{L} \int_{(\pi-\alpha)/2}^{(\pi+\alpha)/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{2R^2}{L} \sin \frac{\alpha}{2} = R \left(\frac{2R}{L} \right) \sin \left(\frac{L}{2R} \right).$$

Этот же результат может быть получен из теоремы Паппа (см. «Лекции», вып. 2, стр. 333, 334). При вращении проволоки вокруг оси y получается шаровой пояс площадью

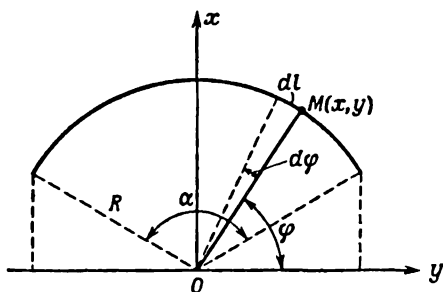
$$2\pi R \cdot 2R \cos \left(\frac{\pi - \alpha}{2} \right) = 4\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Центр масс проволоки описывает окружность длиной $2\pi x_{ц. м}$, так что

$$2\pi x_{ц. м} L = 4\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$x_{ц. м} = R \left(\frac{2R}{L} \right) \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{L}{R}.$$



- 19.14. Разобьем сектор на большое число секторов с вершинами в точке O и очень малым центральным углом $\Delta\alpha$. Каждый такой сектор с большой точностью можно рассматривать как равнобедренный треугольник, центр масс которого лежит на его высоте, на расстоянии $2R/3$ от вершины.

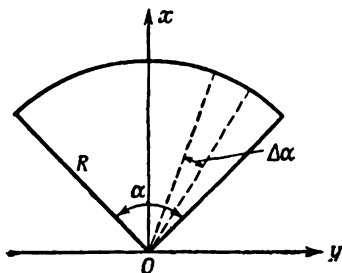
Таким образом, задача о нахождении центра масс сектора свелась к определению центра масс дуги окружности радиусом $2R/3$ и

углом раствора α , т. е. к предыдущей задаче. В такой же системе координат, как и в задаче 19.13, $y_{ц. м.} = 0$, а

$$x_{ц. м} = \frac{2}{3} R \left(2 \frac{2}{3} \frac{R}{L} \right) \sin \frac{L}{2(2R/3)}.$$

Учитывая, что $L = (2/3) R\alpha$, находим

$$x_{ц. м} = \frac{4}{3} \frac{R}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}.$$



- 19.15. а) Определим положение центра масс, получившегося после склеивания тела. Как было показано в предыдущей задаче, центр масс сектора лежит на его биссектрисе на расстоянии $(4R/3\alpha) \sin(\alpha/2)$ от центра окружности. (В нашем случае это расстояние равно $\sqrt{3}$ см, поскольку $R = \pi$ см и $\alpha = 2\pi/3$.) Биссектриса сектора массой $2M$ направлена горизонтально, поэтому координаты центра масс этого тела $x_2 = -\sqrt{3}$ см, $y_2 = 0$. Биссектриса сектора массой M образует угол 30° с вертикалью, так что координаты x_1 и y_1 центра масс этого сектора равны

$$x_1 = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см.} \quad y_1 = -\sqrt{3} \cos 30^\circ = -\frac{3}{2} \text{ см.}$$

Следовательно, координатами центра масс тела, получившегося после склеивания двух частей, являются

$$X = \frac{Mx_1 + 2Mx_2}{M + 2M} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

$$Y = \frac{My_1 + 2My_2}{M + 2M} = -\frac{1}{2} \text{ см.}$$

Рассмотрим силы, действующие на тело. Это сила тяжести, приложенная в центре масс тела, силы давления пола и стенки P и N и сила трения о пол $F_{\text{тр}}$. Эти силы приложены в точках соприкосновения тела со стенкой и полом и направлены так, как показано на рисунке. Поскольку тело находится в равновесии, геометрическая сумма всех сил равна нулю; сумма моментов этих сил, например относительно точки O , также равна нулю. Это дает

$$P = 3Mg, \quad N = F_{\text{тр}} \quad \text{и} \quad \pi F_{\text{тр}} = -X \cdot 3Mg,$$

откуда

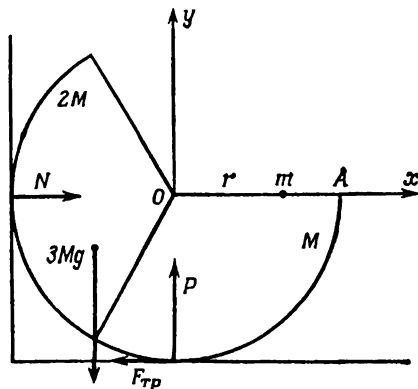
$$N = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} Mg.$$

- Поскольку $M = 1$ кг, тело давит на стенку с силой $3\sqrt{3}/2\pi$ кг. б) Если на линии OA на расстоянии r от точки O поместить тело массой m , то система останется в равновесии до тех пор, пока будут равны друг другу моменты сил тяжести составного тела и шарика относительно точки соприкосновения тела и пола:

$$mgr = 3XMg,$$

что дает

$$r = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{M}{m}.$$



- 19.16. Поскольку вся фигура, подвешенная в точке P , находится в равновесии независимо от ее положения, точка P является ее центром масс.

Пусть высота вырезанного треугольника равна h . Его центр масс находится на расстоянии $2h/3$ от P . Центр масс полученной фигуры и вырезанного треугольника расположен в точке O , следовательно (см. задачу 19.12),

$$\left(a^2 - \frac{ah}{2}\right) \left(h - \frac{a}{2}\right) = \frac{ah}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{h}{3}\right).$$

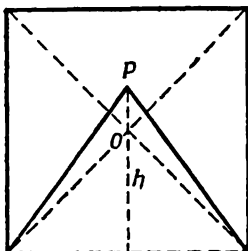
Из этого соотношения получаем квадратное уравнение для h :

$$2h^2 - 6ah + 3a^2 = 0,$$

откуда

$$h = \frac{a(3 \pm \sqrt{3})}{2}.$$

Так как по смыслу задачи $h < a$, в качестве решения выбираем меньший корень квадратного уравнения, т. е. $h = 0,63a$.



- 19.17. а) На катушку действует сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила натяжения T вдоль нити. Катушка не будет раскачиваться, если нет горизонтальных сил, т. е. если нить вертикальна.
б) Запишем уравнения движения катушки:
для поступательного

$$2Ma = 2Mg - T,$$

для вращательного

$$I\varepsilon = Tr;$$

здесь a — ускорение центра масс катушки, ε — ее угловое ускорение, M — масса одного диска, T — натяжение нити. Учитывая, что $\varepsilon = a/r$ и $I = MR^2$, уравнения движения перепишем в виде

$$2Ma = -T + 2Mg,$$

$$MR^2a = Tr^2,$$

откуда

$$a = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2}\right)^{-1} g.$$

- 19.18. а) Запишем закон сохранения момента количества движения

$$(I_0 + mR^2)\omega_0 = (I_0 + mr^2)\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} \omega_0.$$

б) Изменение кинетической энергии системы равно

$$-\frac{1}{2}(I_0 + mR^2)\omega_0^2 + \frac{1}{2}(I_0 + mr^2)\omega^2 = \\ = \frac{1}{2}\omega_0^2(I_0 + mR^2)\left[\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right].$$

С другой стороны, чтобы удержать вращающееся с угловой скоростью ω тело массой m на расстоянии x от оси вращения, необходимо приложить к нити силу

$$F = m\omega^2 x = \left(\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mx^2}\right)^2 m\omega_0^2 x.$$

Работа этой силы при изменении x от R до r равна

$$W = \int_R^r F dx = (I_0 + mR^2)^2 m\omega_0^2 \int_R^r \frac{x dx}{(I_0 + mx^2)^2} = \\ = \frac{1}{2}\omega_0^2(I_0 + mR^2)\left[\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right],$$

т. е. разности кинетических энергий системы в конечном и начальном состояниях.

в) В системе координат, вращающейся вместе со столом, радиальная скорость тележки увеличивается благодаря действию центробежной силы, так что в этой системе кинетическая энергия тележки в точке R равна вычисленной в п. (б) работе W , т. е.

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = W,$$

откуда

$$v_r^2 = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}(R^2 - r^2)\omega_0^2.$$

К главе 20. Вращение в пространстве

20.1. Векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + \\ + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Используя свойства детерминанта, получаем

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x + c_x & b_y + c_y & b_z + c_z \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c};$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha a_x & \alpha a_y & \alpha a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b});$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}); \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} (a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z) + \dots = \\ &= \mathbf{i} [b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_y b_y + a_z b_z + a_x b_x) + \\ &+ a_x b_x c_x - a_x b_x c_x] + \dots = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Все эти соотношения можно доказать, записав векторы в компонентной форме и тщательно проделав соответствующие математические выкладки.

- 20.2. Направим ось z вдоль вектора ω (т. е. вдоль оси вращения твердого тела), а начало координат поместим в произвольной точке на оси вращения. Вычислим векторное произведение $\omega \times \mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки P тела) в этой системе координат:

$$\omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

Полученный вектор лежит в плоскости xy и перпендикулярен вектору $\mathbf{r}'(x, y)$, модуль его равен $\omega \sqrt{y^2 + x^2} = \omega r'$. Поскольку $\mathbf{r}'$ — расстояние от точки P до оси вращения, вычисленное векторное произведение есть не что иное, как скорость точки P твердого тела, т. е. $\mathbf{v}_P = \omega \times \mathbf{r}$.

- 20.3. Пусть тело повернется на некоторый очень малый угол $\Delta\theta_1$ вокруг оси I , проходящей через начало координат. Введем вектор $\Delta\theta_1$, величина которого равна $\Delta\theta_1$, а направление совпадает с осью вращения, т. е. $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_1 \cdot \mathbf{n}_1$ ($\mathbf{n}_1$ — единичный вектор вдоль оси вращения). Очевидно, что при таком повороте радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки M станет равным $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Величина приращения ра-

диуса-вектора равна (см. рисунок) $r \sin \alpha \cdot \Delta\theta_1$, причем вектор $\Delta\mathbf{r}$ направлен перпендикулярно $\mathbf{r}$ и оси вращения (т. е. $\Delta\theta_1$). Отсюда, вспоминая определение векторного произведения, записываем

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\theta_1 \times \mathbf{r}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\theta_1 \times \mathbf{r}.$$

Если произведен еще один поворот на малый угол $\Delta\theta_2$ вокруг другой оси, проходящей через начало координат, то новый радиус-вектор той же точки M (обозначим его $\mathbf{r}''$) может быть выражен через $\mathbf{r}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \Delta\theta_2 \times \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\theta_1 \times \mathbf{r} + \Delta\theta_2 \times (\mathbf{r} + \Delta\theta_1 \times \mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{r} + (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

В последнем выражении отброшены бесконечно малые величины второго порядка.

Таким образом, два последовательных поворота на углы $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_2$ вокруг разных осей эквивалентны одному повороту на угол

$$\Delta\theta = \sqrt{\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 + 2 \Delta\theta_1 \Delta\theta_2 \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)}$$

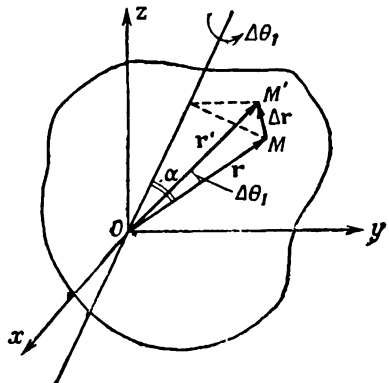
вокруг оси, направление которой совпадает с направлением вектора $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$. Аналогично для N поворотов на малые углы $\Delta\theta_i$ имеем

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^N \Delta\theta_i.$$

Рассматривая угловую скорость как вектор, направленный вдоль оси вращения, модуль которого равен изменению угла в единицу времени, записываем $\omega_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\theta_i / \Delta t$. Поэтому вращение тела с не-

сколькими угловыми скоростями относительно различных осей эквивалентно вращению с одной угловой скоростью

$$\begin{aligned} \omega &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta\theta_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \omega_i. \end{aligned}$$



20.4. Обозначим через $\mathbf{r}'$ координаты частиц в системе ц. м. Очевидно,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{\text{ц. м.}} + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_{\text{ц. м.}} + \mathbf{v}'_i.$$

Момент количества движения системы частиц равен

$$\begin{aligned} L &= \sum_i m_i r_i \times v_i = \sum_i m_i (R_{ц.м} + r'_i) \times (v_{ц.м} + v'_i) = \\ &= \sum_i m_i R_{ц.м} \times v_{ц.м} - v_{ц.м} \times \sum_i m_i r'_i + \\ &+ \sum_i m_i r'_i \times v'_i + R_{ц.м} \times \sum_i m_i v'_i. \end{aligned}$$

Поскольку по определению центра масс системы $\sum_i m_i r'_i = 0$ и $\sum_i m_i v'_i = 0$, получаем

$$L = L_{ц.м} + MR_{ц.м} \times v_{ц.м}.$$

Это выражение по структуре совпадает с выражением, полученным в решении задачи 11.9: момент количества движения системы материальных точек в лаб. системе координат равен ее моменту количества движения в системе ц.м. плюс момент количества движения центра масс, рассматриваемого как материальная точка массой M , движущаяся со скоростью $v_{ц.м.}$ относительно лаб. системы координат.

- 20.5. а) Объем V параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту: $V = SH$.

Обозначим угол между сторонами A и B основания через α . Величина площади основания равна

$$S = A \cdot B \sin \alpha = |A \times B|.$$

Вектор $S = A \times B$ направлен перпендикулярно векторам A и B , т. е. его направление совпадает с нормалью к основанию.

Если угол между S и C равен θ , то

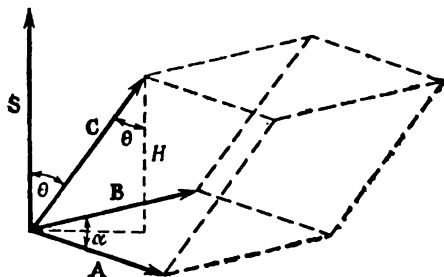
$$V = SH = SC \cos \theta = |C \cdot (A \times B)|.$$

- б) Параллелепипед определен тремя векторами:

$$a = 10i - 5j + 3k, \quad b = 3i - 4j + 7k, \quad c = -5i - 6j + 3k.$$

Следовательно, его объем равен абсолютной величине детерминанта, составленного из компонент этих векторов:

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 406 \text{ единиц объема.}$$



20.6. Центр масс системы из двух стержней расположен в точке O , лежащей в середине отрезка O_1O_2 (O_1, O_2 — центры масс каждого стержня, совпадающие с геометрическими центрами стержней). После удара в точку C стержни придут в движение, которое можно разложить на два: поступательное движение системы как целого со скоростью v по линии удара и вращательное вокруг центра масс O с некоторой угловой скоростью ω . Пусть m и l — масса и длина каждого из стержней, а p — переданный в результате удара импульс. Из закона сохранения импульса $2mv = p$ следует, что скорость поступательного движения системы равна $v = p/2m$, а из закона сохранения момента количества движения $I\omega = pDC$, что $\omega = (3pl/4I) \times (DC = 3l/4)$, где I — момент инерции стержней относительно центра масс системы.

Из прямоугольного треугольника O_1AO_2 легко найти, что

$$OO_1 = \frac{1}{2} O_1O_2 = \frac{l}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$I = 2 \left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{8} \right) = \frac{5}{12} ml^2 \quad \text{и} \quad \omega = \frac{9}{5} \frac{p}{ml}.$$

Линейные скорости центров масс стержней O_1 и O_2 , возникающие за счет вращательного движения, одинаковы по величине и равны

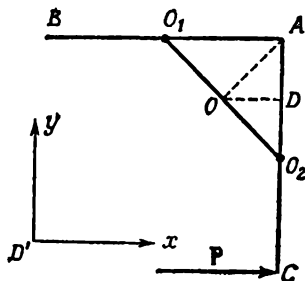
$$u = \omega O_1O = \frac{9}{10\sqrt{2}} \frac{p}{m}$$

и направлены перпендикулярно линии O_1O_2 . В системе координат, показанной на рисунке, скорость поступательного движения имеет только x -составляющую, а вращательные скорости точек O_1 и O_2 образуют угол 45° с осями координат. Результирующие скорости центров масс стержней v_1 и v_2 равны векторной сумме скорости центра масс системы в целом и скорости, приобретенной центрами масс стержней за счет вращательного движения. Имеем

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v - \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{20} \frac{p}{m}, & v_{1y} &= -\frac{u}{\sqrt{2}} = -\frac{9}{20} \frac{p}{m}; \\ v_{2x} &= v + \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{19}{20} \frac{p}{m}, & v_{2y} &= \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{9}{20} \frac{p}{m}. \end{aligned}$$

Отношение модулей скоростей равно

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}}{\sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}} \approx 0,43.$$



- 20.7. Направим ось y вдоль вектора угловой скорости маховика (т.е. по оси вращения). Введем также другую систему координат $x'y'$, ось y' которой перпендикулярна плоскости диска, а x' лежит в этой плоскости. Компоненты угловой скорости в этой системе

$$\omega_{x'} = \omega \sin \alpha, \quad \omega_{y'} = \omega \cos \alpha, \quad \omega_{z'} = 0$$

(α — угол между осью вращения и осью y'). Компоненты момента количества движения в штрихованной системе координат равны

$$L_{x'} = I_{x'} \omega_{x'} = \frac{MR^2}{4} \omega \sin \alpha,$$

$$L_{y'} = I_{y'} \omega_{y'} = \frac{MR^2}{2} \omega \cos \alpha,$$

$$L_{z'} = 0$$

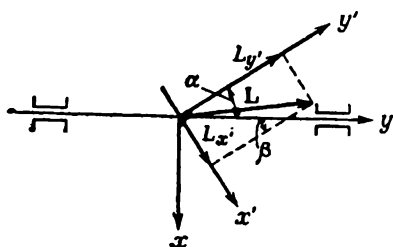
(M — масса диска, R — его радиус).

При вычислении момента инерции диска относительно оси x' мы воспользовались тем, что $I_{y'} = I_{x'} + I_{z'}$. В силу симметрии диска $I_{x'} = I_{z'}$, так что $I_{x'} = I_{y'}/2 = MR^2/4$.

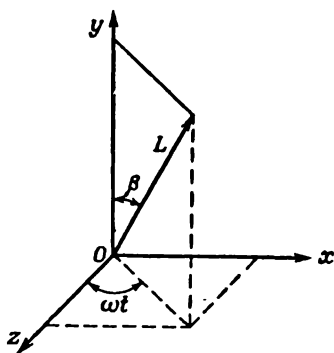
Вектор момента количества движения образует с осью y угол β , причем

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{L_{x'}}{L_{y'}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку углы α и β малы, можно положить $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \approx \alpha - \beta$, а $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, так что $\alpha - \beta = \alpha/2$, откуда $\beta = \alpha/2$. В нештрихованной



Фиг. 1.



Фиг. 2.

системе координат вектор момента количества движения L вращается вокруг оси y с угловой скоростью ω . Следовательно, его x - и z -компоненты меняются со временем по закону (фиг. 2)

$$L_z = \beta L \cos \omega t, \quad L_x = \beta L \sin \omega t,$$

где

$$L = \sqrt{L_{x'}^2 + L_{y'}^2} = \frac{MR^2}{4} \sqrt{5} \omega.$$

Значит, на маховик действует момент сил $\tau = dL/dt$, компоненты которого

$$\tau_x = \frac{dL_x}{dt} = \beta \omega L \cos \omega t,$$

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = -\beta \omega L \sin \omega t,$$

$$\tau_y = 0,$$

а модуль равен

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2} = \beta \omega L = \frac{MR^2 \sqrt{5}}{8} \omega^2 \alpha \approx 30 \text{ ньютон} \cdot \text{м}.$$

Момент пары сил, возникающий в подшипниках, как раз и равен вычисленному моменту.

20.8. Силы притяжения тел массой m к телу массой M определяются выражением

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{GmM}{R_1^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta} \approx \frac{GmM}{R^2 \left(1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta\right)} \approx \\ &\approx \frac{GmM}{R^2} \left(1 + 2 \frac{r}{R} \cos \theta\right) \end{aligned}$$

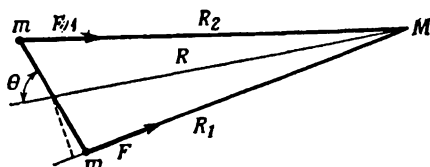
и

$$F_2 = \frac{GmM}{R_2^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta} \approx \frac{GmM}{R^2} \left(1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta\right).$$

При получении приближенных выражений мы пренебрегли r^2 по сравнению с R^2 и учли, что $(r/R) \cos \theta \ll 1$, воспользовавшись соотношением $1/(1 \pm x) \approx 1 \mp x$ при $x \ll 1$. Вращающий момент τ равен разности моментов сил F_1 и F_2 относительно точки O , так что $\tau = F_1 r \sin \theta - F_2 r \sin \theta$ (плечи обеих сил приближенно равны $r \sin \theta$).

Подставляя вместо F_1 и F_2 их значения, получаем

$$\tau = \frac{2GmMr^2}{R^3} \sin 2\theta.$$



Обратите внимание, что момент равен нулю при двух положениях масс: когда $\theta = 0$ (и, следовательно, момент силы притяжения каждой массы m равен нулю) и когда $\theta = \pi/2$, т.е. когда модули сил F_1 и F_2 равны друг другу и их моменты взаимно компенсируются.

20.9. Сплюснутость Земли при вычислении действующего на нее момента сил можно приближенно учесть, заменив Землю двумя точечными массами, находящимися на некотором расстоянии друг от друга. Далее, воспользовавшись конечным результатом предыдущей задачи, находим отношение вращательных моментов, создаваемых Солнцем

и Луной:

$$\frac{\tau_c}{\tau_l} = \frac{M_c}{M_l} \left(\frac{R_l}{R_c} \right)^3 \approx 0,47,$$

где M_l и M_c — массы Луны и Солнца, а R_l и R_c — расстояния от Земли до Луны и Солнца соответственно.

- 20.10. а) Перепишем таблицу удельной плотности в более удобной форме, отсчитывая расстояния от центра Земли, а не от ее поверхности и принимая средний радиус Земли равным 6370 км:

$R, \text{ км}$	370	1370	2870	3470	4370	5370	5970	6170	6270	6340	6370
		11,5		5,7						3,0	
$\rho, \text{ г/см}^3$	17,1	16,8	10,2	9,4	5,2	4,7	3,6	3,5	3,4	3,3	2,6

Землю представим себе состоящей из нескольких шаровых слоев, плотность внутри каждого из которых постоянна и равна полусумме плотностей, соответствующих внутреннему и внешнему радиусам слоя. Там, где имеется разрыв плотности, большее значение ее будем приписывать внутренней части слоя, а меньшее — внешней.

Момент инерции шарового слоя с постоянной плотностью ρ и внешним и внутренним радиусами r_1 и r_2 найдем, вычитая из момента инерции шара радиусом r_1 момент инерции шара радиусом r_2 . Таким образом,

$$I = \frac{2}{5} M_1 r_1^2 - \frac{2}{5} M_2 r_2^2 = \frac{8}{15} \pi \rho (r_1^5 - r_2^5),$$

или для i -го слоя

$$I_i = \frac{8}{15} \pi \rho_i (r_i^5 - r_{i-1}^5), \quad r_0 = 0.$$

Полный момент инерции Земли равен сумме моментов инерции шаровых слоев, так что

$$I = \sum_{i=1}^{11} I_i = 8,1 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

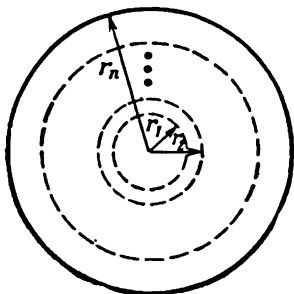
- б) Момент количества движения Земли L равен

$$L = I\omega = \frac{2\pi I}{\tau} \approx 5,9 \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}$$

($\tau = 8,64 \cdot 10^4 \text{ сек}$ — период обращения Земли вокруг своей оси).

- в) Кинетическая энергия Земли

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 \approx 2,1 \cdot 10^{29} \text{ Дж}.$$



- 20.11. 1. Согласно формуле, полученной в задаче 10.8, кинетическая энергия катящегося тела складывается из кинетической энергии движения его центра масс и кинетической энергии тела в системе ц. м. Так как тело скатывается по наклонной плоскости без скольжения и в силу симметрии тела относительно оси вращения, его центр масс находится на этой оси, движение тела в системе ц. м. представляет собой чистое вращение, угловая скорость которого $\omega = v/r$ (v — скорость тела в произвольный момент времени). Таким образом, кинетическая энергия тела

$$T = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения.

Величину скорости v центра масс в нижней точке наклонной плоскости определим из закона сохранения энергии

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/r^2}}.$$

2. Применим эту формулу для частных случаев, перечисленных в условии задачи.

а) Сфера:

$$I = \frac{2}{3} Mr^2, \quad v = \sqrt{\frac{6}{5} gh}.$$

б) Диск:

$$I = \frac{1}{2} Mr^2, \quad v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

в) Диск массой M_1 и радиусом R_1 , насаженный на вал массой m_2 и радиусом R_2 :

$$I = \frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{4(M_1 + m_2)gh}{3M_1 + m_2 \left[2 + \left(\frac{r_2}{R_1} \right)^2 \right]}}.$$

- 20.12. а) Центр масс однородного стержня находится в его середине, т. е. на расстоянии $L/2$ от конца. Центр масс системы из стержня и кусок замазки находится посредине отрезка, соединяющего кусок замазки и точку O , т. е. на расстоянии $L/4$ от линии удара.

Стержень до удара покоился, поэтому

$$v_{ц.м.} = \frac{Mv}{M + M} = \frac{v}{2}.$$

Из закона сохранения импульса следует, что скорость центра масс после удара не изменилась, т. е. осталась равной $v/2$.

- б) Момент количества движения системы относительно ее центра масс до удара равен $MvL/4$.

- в) Момент количества движения системы после столкновения равен $I\omega$, где I — момент инерции относительно центра масс, причем

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + 2M \frac{L^2}{16} = \frac{5}{24} ML^2,$$

а ω — угловая скорость вращения относительно центра масс.

Из закона сохранения момента количества движения

$$\frac{1}{4} MvL = \frac{5}{24} ML^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{6}{5} \frac{v}{L}.$$

- г) Так как скорость центра масс равна $v/2$, кинетическая энергия системы после удара

$$T_k = \frac{1}{2} (2M) \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{2}{5} Mv^2.$$

Изменение кинетической энергии при ударе

$$\Delta T = \frac{1}{2} Mv^2 - T_k = 0,2T_n$$

($T_n = Mv^2/2$ — начальная кинетическая энергия системы).

- 20.13. Пусть I и ω — момент инерции и угловая скорость вращения Земли до таяния льда, а $I + \Delta I$ и $\omega + \Delta\omega$ — те же величины после того, как лед растаял. Из закона сохранения момента количества движения следует, что

$$I\omega = (I + \Delta I)(\omega + \Delta\omega),$$

или, поскольку $\omega = 2\pi/T$,

$$\frac{I}{T} = \frac{I + \Delta I}{T + \Delta T}.$$

Таким образом,

$$\Delta T = \frac{\Delta I}{I} T.$$

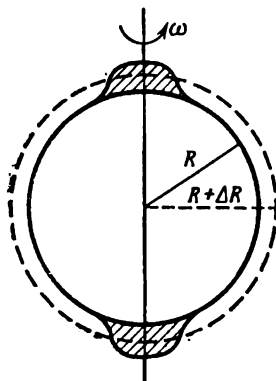
Изменение момента инерции Земли ΔI произошло за счет того, что вода, сосредоточенная ранее (в виде льда) вблизи оси вращения (и поэтому дававшая очень малый вклад в момент инерции Земли), растаяв, распределилась по шаровому слою радиусом R и толщиной ΔR . Момент инерции такого слоя (см. задачу 20.10)

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{8}{15} \pi \rho [(R + \Delta R)^5 - R^5] \approx \\ &\approx \frac{8}{3} \pi \rho R^4 \Delta R. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta T = \frac{8}{3} \frac{\pi \rho R^4}{I} T \Delta R.$$

Учитывая, что для воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, а период вращения Земли вокруг своей оси $T = 8,64 \cdot 10^4 \text{ сек}$, получаем $\Delta T \sim 1 \text{ сек}$.



- 20.14. а) Скорость центра масс найдем из закона сохранения импульса $Mv_0 = J$, откуда $v_0 = J/M$. Определим угловую скорость вращения ω вокруг центра масс из закона сохранения момента количества движения

$$Jr = \frac{ML^2}{12} \omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{12Jr}{ML^2}.$$

Скорость точки A непосредственно после удара равна сумме скоростей двух движений: поступательного вместе с центром масс со скоростью v_0 и вращательного относительно центра масс с угловой скоростью ω . Следовательно,

$$v_A = -\frac{\omega L}{2} + v_0 = -\frac{12Jr}{ML^2} + \frac{J}{M} = \frac{J}{M} \left(1 - \frac{6r}{L}\right).$$

- б) Если $v_A = 0$, то для расстояния $OP = r$ получим уравнение

$$1 - \frac{6r}{L} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{L}{6}.$$

Очевидно,

$$AP = AO + OP = \frac{L}{2} + \frac{L}{6} = \frac{2}{3} L.$$

К главе 21. Гармонический осциллятор

- 21.1. а) Пусть C — центр масс тела, а через точку O проходит ось вращения. В положении равновесия точки O и C находятся на одной вертикали. Уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = \tau,$$

где L — момент количества движения, а τ — момент внешних сил.

В нашем случае нужно учесть только силу тяжести (приложенную в точке C), момент которой относительно точки O равен $-Mgd \sin \theta$. Момент количества движения тела равен $I\omega$, так что

$$\frac{d}{dt} I\omega = -Mgd \sin \theta.$$

Но $\omega = d\theta/dt$, поэтому после дифференцирования по времени получим

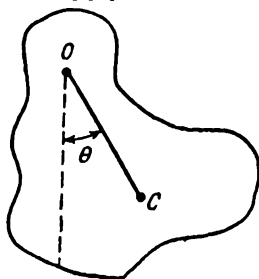
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgd \sin \theta = 0.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла θ со временем.

- б) Если предположить, что θ мало, т. е. $\sin \theta \approx \theta$, получим

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgd\theta = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0.$$

В § 2 гл. 21 «Лекций» (вып. 2, стр. 363) было показано, что такое дифференциальное уравнение описывает колебания с периодом $T = 2\pi/\omega$, где $\omega^2 = Mgd/I$. Следовательно, период малых колебаний тела



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}.$$

- 21.2. В найденном в предыдущей задаче выражении для периода колебаний положим $I = I_C + Md^2$. Тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + Md^2}{Mgd}}.$$

- а) Найдем d , соответствующее данному значению периода. Решая квадратное уравнение

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}d + \frac{I_C}{M} = 0,$$

находим

$$d_1 = \frac{gT^2}{8\pi^2} + \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}$$

и

$$d_2 = \frac{gT^2}{8\pi^2} - \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}.$$

Следует рассмотреть оба решения квадратного уравнения, поскольку они оба имеют физический смысл в силу того, что

$$\frac{gT^2}{8\pi^2} > \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}.$$

- б) Складывая d_1 и d_2 , получаем

$$d_1 + d_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}, \quad \text{откуда} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}.$$

- в) Период минимален при таком значении d , при котором минимально выражение

$$\frac{I_C + Md^2}{Mgd}$$

(подкоренное выражение в формуле для периода). Условие минимума имеет вид

$$\left(\frac{I_C + Md^2}{Mgd} \right)' = 0$$

(штрих означает дифференцирование по d), т. е.

$$\frac{2Md Mgd - (I_C + Md^2) Mg}{M^2 g^2 d^2} = 0.$$

Отсюда

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{I_C}{M}}.$$

Подставляя это выражение в формулу для периода колебаний, получаем минимальное значение периода

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2d_{\min}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{I_C}{M}}.$$

- 21.3. Из того факта, что пружина под действием силы тяжести, создаваемой грузом массой m , удлиняется на A , находим ее коэффициент жесткости $k = mg/A$.

Когда на пружине неподвижно висят два груза общей массой $2m$, ее длина l_0 определяется условием

$$k(l_0 - D) = 2mg, \text{ так что } l_0 = D + 2A.$$

Поместим начало координат в точку l_0 , а ось x направим вертикально вниз. В этом случае уравнение движения грузиков примет вид

$$2m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \frac{g}{2A}x = 0.$$

Дифференциальное уравнение такого типа, как известно, описывает колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2A}{g}}, \quad \omega^2 = \frac{g}{2A}.$$

Легко убедиться в том, что решением этого уравнения является функция

$$x(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

где B_1 и B_2 — постоянные, определяемые из начальных условий.

Систему координат мы выбрали таким образом, что $x = x_0 = -A$ при $t = 0$. Начальную скорость v_0 находим, учитывая сохранение импульса при ударе

$$mv = 2mv_0,$$

откуда

$$v_0 = \frac{v}{2}$$

(v — скорость тела, упавшего с высоты A , т. е. $v = \sqrt{2gA}$). Таким образом,

$$v_0 = \sqrt{\frac{gA}{2}}.$$

Скорость грузовиков в произвольный момент времени найдем, дифференцируя $x(t)$ по времени:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -B_1\omega \sin \omega t + B_2\omega \cos \omega t.$$

Теперь нетрудно убедиться, что начальным условиям задачи соответствуют постоянные $B_2 = -B_1 = A$, т. е. решение уравнения движения имеет вид

$$x = A(\sin \omega t - \cos \omega t).$$

Амплитуда колебаний, т. е. максимальное отклонение точки от положения равновесия, достигается в тот момент времени t_1 , когда скорость колеблющихся грузов равна нулю:

$$v(t_1) = A\omega(\sin \omega t_1 + \cos \omega t_1) = 0,$$

что дает

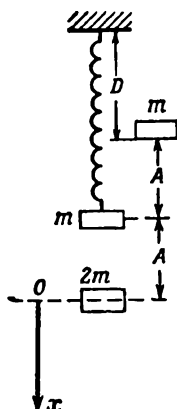
$$\sin \omega t_1 = -\cos \omega t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$x_{\text{макс}} = A\sqrt{2}.$$

Максимальная высота подъема над первоначальным положением равновесия (находящимся на расстоянии A вверх от начала координат) равна

$$H = x_{\text{макс}} - A = A(\sqrt{2} - 1).$$



21.4. а) Частицы A и B движутся вдоль прямой по закону

$$x_A = a \sin \omega_A t, \quad x_B = a \sin \omega_B t,$$

где a — амплитуда колебаний частиц.

В момент времени $t = 0,350$ сек расстояние между ними

$$r = x_B - x_A = a(\sin \omega_B t - \sin \omega_A t) = 2,17 \text{ см.}$$

б) Относительная скорость B по отношению к A

$$v_{BA} = \dot{r} = \dot{x}_B - \dot{x}_A = a(\omega_B \cos \omega_B t - \omega_A \cos \omega_A t) = 50 \text{ см/сек.}$$

21.5. В задаче 21.1 получено уравнение малых колебаний твердого тела

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0,$$

где d — расстояние от оси вращения до центра масс тела, I — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку под-

веса. Из него следует, что

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}.$$

Если масса единицы длины проволоки равна ρ , то масса всего каркаса $M = \rho(\pi R + 2R) = \rho R(2 + \pi)$ (R — радиус полуокружности ACB), а

$$I = \pi \rho R \cdot R^2 + 2\rho R \frac{(2R)^2}{12} = \rho R^3 \left(\frac{2}{3} + \pi \right).$$

Центр масс полуокружности ACB лежит на перпендикуляре к диаметру AB , проходящем через точку подвеса P на расстоянии (см. задачу 19.13)

$$d_1 = R \left(\frac{2R}{L} \right) \sin \left(\frac{L}{2R} \right) = \frac{2R}{\pi} \quad (L = \pi R),$$

а центр масс диаметра AB располагается в точке подвеса. Следовательно,

$$d = \frac{\pi \rho R d_1}{\pi \rho R + 2\rho R} = \frac{\pi}{2 + \pi} d_1 = \frac{2R}{2 + \pi}.$$

Таким образом,

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \pi \right) \frac{R}{2g}} \approx 2 \text{ сек}$$

- 21.6. Обозначим жесткость пружины через k . Период колебания пластинки массой m совместно с грузиком массой m_1 равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_1}{k}}.$$

Учитывая, что $T = \pi/3$, находим

$$k = 36(m + m_1).$$

Удлинение пружины после того, как с пластинки снят груз m_1 и положен груз m_2 , равно

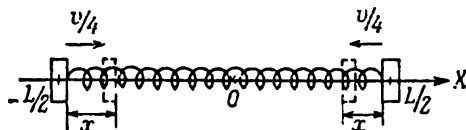
$$d = \frac{m_2 - m_1}{36(m + m_1)} g \approx 21,8 \text{ см}$$

- 21.7. После удара центр масс всей системы будет двигаться вправо со скоростью $v_{ц. м.}$, определяемой из закона сохранения количества движения

$$\frac{1}{4} Mv = 2Mv_{ц. м.} \quad \text{откуда} \quad v_{ц. м.} = \frac{1}{8} v.$$

Сразу после удара частица массой M покоится, а слипшиеся частицы (их масса тоже M) движутся со скоростью $v_{10} = v/4$, скажем, вправо. Поэтому в системе ц.м. частицы (массой M каждая), расположенные на концах пружины, движутся навстречу друг другу с равными скоростями $v/4 - v/8 = v/8$. Следовательно, в дальнейшем рассматриваемые частицы в системе ц.м. будут совершать гармонические колебания около положений равновесия, расположенных в точках $-L/2$ и $L/2$ для левой и правой масс соответственно,

Пусть каждая из масс сдвинется на расстояние x из положения равновесия, как показано на рисунке. Длина пружины при этом уменьшится на $2x$; следовательно, на каждую частицу будет дейст-



вовать сила $-2kx$, так что уравнение движения одной из масс принимает вид

$$M\ddot{x} + 2kx = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

Постоянные интегрирования A и B находим из начальных условий при $t = 0$: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v/4$, откуда $A = 0$ и $B = \dot{x}_0/\omega$.

Таким образом,

$$x = \frac{1}{4} v \sqrt{\frac{M}{2k}} \sin \sqrt{\frac{2k}{M}} t.$$

Как следует из полученного закона движения, каждая масса совершает колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2k}}$$

и амплитудой

$$a = \frac{v}{4} \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Двигаться частицы будут в «противофазе», т.е. либо навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями и ускорениями, либо в противоположные стороны.

- 21.8. Из условия задачи следует, что действующая на частицу сила прямо пропорциональна r — расстоянию от центра Земли — и направлена к центру, поэтому $m\ddot{r} + kr = 0$, где k — коэффициент пропорциональности в выражении, определяющем зависимость силы от расстояния. Таким образом, частица совершает колебания вокруг центра Земли с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

где $\omega^2 = k/m$.

Замечая, что на поверхности Земли сила притяжения равна весу тела, находим константу $k = mg/R$. Очевидно, сквозь Землю по диаметру тело пройдет за время $t = T/2$.

Используя найденное значение k , получаем

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 2500 \text{ сек} \approx 42 \text{ мин.}$$

- 21.9. Обозначим через n число бактерий в колонии. Скорость роста населения колонии равна dn/dt . По условию

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n, \quad \alpha — \text{коэффициент пропорциональности.}$$

Это и есть дифференциальное уравнение роста колонии. Из него следует, что население колонии растет со временем по закону $n = n_0 e^{\alpha t}$, где n_0 — население колонии в момент времени $t = 0$.

- 21.10. Поместим начало координат в положение равновесия, а оси координат направим, как показано на рисунке. Колебания в точке подвеса будем характеризовать координатой x , а самого маятника — углом φ . Как видно из рисунка, в произвольный момент времени

$$x_M = x + l \sin \varphi,$$

$$y_M = l \cos \varphi,$$

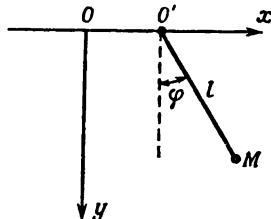
где l — длина маятника.

Запишем уравнение движения маятника в системе координат, движущейся вместе с точкой подвеса. В этой системе на тело массой m действует также псевдосила $-m\ddot{x}$, поэтому

$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - m\ddot{x}l \cos \varphi.$$

Учитывая, что $l = ml^2$, получаем

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{\ddot{x}}{l} \cos \varphi.$$



Предположим, что φ мало, т. е. $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$. В этом приближении (приближении малых колебаний) уравнение для φ имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{a\omega^2}{l} \sin \omega t,$$

где учтено, что по условию задачи

$$x = a \sin \omega t \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad a = 1 \text{ см} \right).$$

Удобно вернуться к переменной x_M , используя соотношения

$$\frac{x_M - x}{l} = \sin \varphi \approx \varphi$$

и

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_M - \ddot{x}}{l}.$$

Для этой переменной

$$\ddot{x}_M + \omega_0^2 x_M = a\omega^2 \sin \omega t, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Мы пришли к такому же дифференциальному уравнению для x_m , как и в § 5 гл. 21 «Лекций» (вып. 2, стр. 368), только в правой части вместо функции $\cos \omega t$ имеем $\sin \omega t$. Поэтому будем искать решение в виде $x_m = C \sin \omega t$ (C — амплитуда колебаний).

Подставляя это выражение x_m в уравнение колебаний, получаем

$$-C\omega^2 \sin \omega t + C\omega_0^2 \sin \omega t = a\omega^2 \sin \omega t,$$

откуда

$$C = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a.$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, находим

$$C = \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} a \approx 4,76 \text{ см.}$$

Теперь оценим, насколько правильным является выбранное нами приближение малых колебаний. Для этого надо сравнить полученную амплитуду колебаний с длиной нити маятника. По условию задачи период колебаний его равен 1 сек, поэтому

$$l = \frac{gT^2}{4\pi} \approx 25 \text{ см} \quad \text{и} \quad \frac{C}{l} \approx 0,19.$$

Но синус максимального угла отклонения равен как раз C/l , т. е. в условиях нашей задачи $\sin \varphi \leq 0,19$. При таких значениях синусов ошибка, возникающая при замене $\sin \varphi$ самим углом φ , не превышает 1%, так что приближение малых колебаний приемлемо.

К главе 22. Алгебра

- 22.1. а) Вычислим квадрат модуля комплексного числа $u + iv$, воспользовавшись правилами, сформулированными в кратком введении к задачам гл. 22:

$$(u + iv)(u - iv) = [(ac - bd) + i(ad + bc)][(ac - bd) - i(ad + bc)].$$

Отсюда следует, что

$$u^2 + v^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Извлекая квадратный корень из правой и левой частей этого соотношения, приходим к искомому ответу.

- б) Так как по условию задачи $u = ac - bd$ и $v = ad + bc$, то

$$\frac{v}{u} = \frac{ad + bc}{ac - bd} = \frac{d/c + b/a}{1 - \frac{d}{c} \frac{b}{a}} = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

- 22.2. Покажем, что любое комплексное число $u + iv$ можно представить в виде $u + iv = Re^{i\varphi}$, где $R = \sqrt{u^2 + v^2}$ — модуль этого числа, а $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(v/u)$ — фаза комплексного числа. Для этого воспользуемся формулой (А) (стр. 58) и запишем

$$u + iv = Re^{i\varphi} = R \cos \varphi + iR \sin \varphi.$$

Отсюда следует, что $u = R \cos \varphi$ и $v = R \sin \varphi$. Возводя в квадрат эти соотношения и складывая результаты, получаем $R = \sqrt{u^2 + v^2}$.

С другой стороны, ясно, что $v/u = \operatorname{tg} \varphi$, т. е. $\varphi = \operatorname{arctg}(v/u)$. По условию задачи $u + iv = (a + ib)(c + id)$, где

$$\begin{aligned} a + ib &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \operatorname{arctg}(b/a)} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\alpha}, \\ c + id &= \sqrt{c^2 + d^2} e^{i \operatorname{arctg}(d/c)} = \sqrt{c^2 + d^2} e^{i\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u + iv = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\alpha} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} e^{i\beta} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} e^{i(\alpha + \beta)}.$$

Из полученного соотношения ясно, что

$$\begin{aligned} R = \sqrt{u^2 + v^2} &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}, \\ \frac{v}{u} &= \operatorname{tg}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

- 22.3. Требуемые соотношения нетрудно получить, если воспользоваться формулой (А) (стр. 58) и записать

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая левые и правые части этих соотношений, находим требуемый ответ.

- 22.4. Проверяемое соотношение можно получить, если числитель и знаменатель левой части умножить на комплексное число $c - id$.
- 22.5. Приведенные в условии задачи соотношения непосредственно следуют из формулы (А), если в ней положить θ равным чисто мнимому числу $i\theta$, а также вспомнить, что для любого угла сумма квадратов косинуса и синуса равна единице.

- 22.6. Напишем

$$\frac{d}{dx} (e^{ax}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{a(x+\Delta x)} - e^{ax}}{\Delta x} = e^{ax} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{a\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Так как приближенно $e^{a\Delta x} \approx 1 + a\Delta x + \dots$, то получаем требуемый ответ.

- 22.7. а) Приведенный бесконечный ряд является следствием более общей формулы

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_{x=0} x^3 + \dots,$$

поскольку любая производная от экспоненты e^x равна самой функции.

- б) Представление $\cos x$ и $\sin x$ в виде бесконечных рядов непосредственно следует из формулы (А) (стр. 58) и приведенного ряда для e^x , если вместо x взять ix и выделить вещественную и мнимую части.

- 22.8. Единицу можно представить в виде $1 = e^{2\pi im}$, где m — любое целое число. Корни заданного уравнения представляют собой комплексные числа $e^{2\pi im/n}$. Всего существует n различных корней. Их можно получить, придавая m любое из n целых значений от 0 до $n-1$.

22.9. Запишем $e^{in\theta}$ в виде

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= \cos n\theta + i \sin n\theta = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \\ &= \cos^n \theta + in \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \\ &+ \dots + i^n \sin^n \theta. \end{aligned}$$

Приравнивая по отдельности в этом соотношении вещественные и мнимые части, получаем требуемую формулу.

22.10. а) Перемножая функции и приравнивая по отдельности вещественные и мнимые части соотношения

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi) = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned}$$

находим известные тригонометрические формулы

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\sin(\theta+\varphi) = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi.$$

б) В результате перемножения получается вектор в комплексной плоскости, длина которого равна произведению модулей, т. е. $A \cdot B$, а его направление составляет угол $\theta + \varphi$ с действительной осью.

22.11. $\log_{11} 2 = 0,28906$, $\log_{11} 7 = 0,81146$.

К главе 23. Резонанс

23.1. Пусть приложено напряжение вида $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Введем комплексное напряжение $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$, так что $V(t) = \operatorname{Re} \hat{V}$.

а) Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} = V_0 e^{i\omega t}$$

Интегрируя, находим

$$\hat{I} = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{\hat{V}}{i\omega L} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_L}.$$

Следовательно, комплексный импеданс индуктивной цепи равен

$$\hat{Z}_L = i\omega L.$$

б) В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{q(t)}{C} = V_0 e^{i\omega t},$$

т. е. $q(t) = V_0 C e^{i\omega t}$. Отсюда находим

$$\hat{I} = \frac{dq}{dt} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = i\omega C \hat{V} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_C}.$$

Следовательно, комплексный импеданс емкостной цепи равен

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

- 23.2. а) Рассмотрим цепь, показанную на фиг. 1. Введем комплексное напряжение $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$ и комплексный заряд $\hat{q}(t)$ на обкладках конденсатора. Тогда, используя решение задачи 23.1, можно написать дифференциальное уравнение для определения стационарного тока:

$$\frac{\hat{q}(t)}{C} + L \frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{V} = V_0 e^{i\omega t},$$

где $\hat{I} = d\hat{q}/dt$.

Продифференцировав обе части этого уравнения по времени, получим уравнение для комплексного тока:

$$\frac{\hat{I}}{C} + L \frac{d^2 \hat{I}}{dt^2} = i\omega V_0 e^{i\omega t} = i\omega \hat{V}.$$

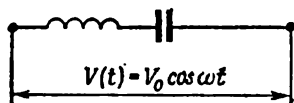
Будем искать решение этого уравнения в виде $\hat{I} = I e^{i\omega t}$. Выполнив необходимое дифференцирование, мы найдем соотношение между $\hat{I}$ и $\hat{V}$:

$$\left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L \right) \hat{I} = \hat{V}.$$

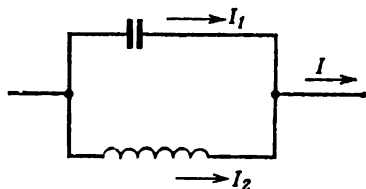
Отсюда следует, что импеданс цепи $\hat{Z} = \hat{V}/\hat{I}$ в случае последовательного соединения равен

$$\hat{Z} = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L.$$

- б) При параллельном соединении конденсатора и катушки индуктивности электрическая цепь имеет вид, показанный на фиг. 2. В этом



Фиг. 1.



Фиг. 2.

случае, очевидно, выполняется условие равенства потенциалов на катушке индуктивности и конденсаторе:

$$\hat{V} = \frac{\hat{q}}{C} = L \frac{d\hat{I}_2}{dt},$$

где $\hat{I}_2$ — комплексный ток через индуктивность. Суммарный ток через цепь равен $I = I_1 + I_2$, где I_1 — ток через конденсатор. Учитывая тот факт, что

$$I_1 = \frac{dq}{dt},$$

и полагая $\hat{I}_1 = I_1 e^{i\omega t}$, $\hat{I}_2 = I_2 e^{i\omega t}$, находим

$$\hat{I}_1 = i\omega C \hat{V}, \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{V}}{i\omega L}.$$

Следовательно,

$$\hat{I} = \hat{V} \left(i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \right).$$

Отсюда

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \left(i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \right)^{-1}.$$

При последовательном соединении при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление цепи обусловлено индуктивностью, а при $\omega \rightarrow 0$ — емкостью. При частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$ имеет место «резонанс»: импеданс цепи обращается в нуль.

При параллельном соединении ситуация противоположна случаю (а): при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление носит в основном емкостный характер (ток течет через конденсатор), а при $\omega \rightarrow 0$ сопротивление цепи связано с наличием индуктивности.

При частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$ наступает резонанс: импеданс цепи обращается в бесконечность.

- 23.3. а) Упругая сила, действующая на тело массой m , равна $-kx$, а сила трения равна $-m\gamma v = -m\gamma(dx/dt)$. Поскольку ускорение тела равно d^2x/dt^2 , уравнение движения тела имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt}.$$

Поделим обе части этого уравнения на массу m и перенесем все члены уравнения в левую часть, затем, используя обозначение $\omega_0^2 = k/m$, получим искомое уравнение.

- б) Будем искать решение сформулированного уравнения в экспоненциальном виде $x = e^{\alpha t}$. Выполняя необходимые дифференцирования и сокращая уравнение на $e^{\alpha t}$, находим квадратное уравнение для определения α :

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

Два корня этого уравнения равны

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

(Здесь учтено, что $\gamma < 2\omega_0$.) С учетом найденного запишем общее решение уравнения движения:

$$x(t) = \operatorname{Re} (C_1 e^{\alpha_1 t} + D_1 e^{\alpha_2 t}),$$

где C_1 и D_1 — комплексные постоянные интегрирования. Представляя эти постоянные в виде $C_1 = C e^{i\theta_1}$ и $D_1 = D e^{i\theta_2}$ (где C и D — модули комплексных чисел C_1 и D_1) и определяя вещественную часть x , находим

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \left[C \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t + \theta_1 \right) + D \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t + \theta_2 \right) \right].$$

Воспользовавшись формулой для косинуса суммы углов (см. решение задачи 22.10), найдем, что решение можно представить в искомом виде, если вместо произвольных постоянных C , D , θ_1 и θ_2 ввести новые две вещественные постоянные A и B , связанные с ними соотношениями

$$A = C \cos \theta_1 + D \cos \theta_2, \quad B = -(C \sin \theta_1 + D \sin \theta_2).$$

- в) В этом случае α_1 и α_2 вещественны и общее решение уравнения движения имеет вид

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \left[A e^{-i \sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} + B e^{+i \sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} \right].$$

23.4. Следует рассмотреть два случая:

- а) $\gamma < 2\omega_0$. Для определения A и B здесь имеем два уравнения:

$$x_0 = A \quad \text{и} \quad v_0 = -\frac{\gamma}{2} A + B \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Решая эти уравнения, находим

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

- б) $\gamma > 2\omega_0$. Из двух уравнений, получаемых из начальных условий

$$x_0 = A + B \quad \text{и} \quad v_0 = -\frac{\gamma}{2} [A + B] + [B - A] \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2},$$

находим

$$A = \frac{1}{2} \left[x_0 - \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} \right],$$

$$B = \frac{1}{2} \left[x_0 + \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} \right].$$

23.5. Обозначим через $\hat{I}_1$ и $\hat{I}_2$ комплексные токи, протекающие через точки A и B . Тогда, очевидно,

$$\hat{I}_1 \cdot 2R = \hat{I}_2 \left(R' + \frac{1}{i\omega C} \right) = \hat{V}_{\text{вх}}.$$

Определив токи, найдем

$$\hat{V}_A = \hat{I}_1 R = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{2}, \quad \hat{V}_B = \hat{I}_2 R' = \frac{\hat{V}_{\text{вх}} R'}{R' + (1/i\omega C)}.$$

Кроме того,

$$\hat{V}_{AB} = \hat{V}_A - \hat{V}_B = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{2} - \frac{\hat{V}_{\text{вх}} R'}{R' + (1/i\omega C)} = -\frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{2} \frac{R' + (i/\omega C)}{R' - (i/\omega C)}.$$

Поскольку мы можем записать комплексное число в виде (см. задачу 22.1)

$$R' \pm \frac{i}{\omega C} = e^{\pm i\varphi} \sqrt{R'^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

где $\varphi = \arctg(1/\omega CR')$, то

$$\frac{R' + (i/\omega C)}{R' - (i/\omega C)} = e^{2i\varphi}.$$

Таким образом, найденное выражение для разности потенциалов $\hat{V}_{AB}$ можно представить в виде произведения модуля комплексного числа, равного $V_{0x}/2$, на фазовый множитель. Фаза разности потенциалов $\hat{V}_{AB}$ при этом равна

$$2 \arctg\left(\frac{1}{\omega CR'}\right) + \pi.$$

Так как при изменении x от 0 до ∞ функция $\arctg x$ меняется в пределах от 0 до $\pi/2$, то, меняя R' (в пределах от 0 до ∞), можно менять фазу $\hat{V}_{AB}$ от π до 0.

- 23.6. а) Введем комплексную э. д. с. $\hat{V}_{Bx} = V_0 e^{i\omega t}$, так что $V_{Bx} = \operatorname{Re} \hat{V}_{Bx}$. Полный импеданс цепи A равен $\hat{Z} = R + (i/\omega C)$, а полный импеданс цепи B равен $i\omega L + R'$. Следовательно,

$$\hat{I}_A(t) = \frac{\hat{V}_{Bx}}{R + (i/\omega C)}, \quad \hat{I}_B(t) = \frac{\hat{V}_{Bx}}{R' + i\omega L}.$$

Очевидно, что

$$\hat{V}_A(t) = \hat{I}_A(t) \frac{1}{i\omega C} = \frac{\hat{V}_{Bx}(t)}{1 + i\omega CR'},$$

$$\hat{V}_B(t) = \hat{I}_B(t) R' = \frac{\hat{V}_{Bx}(t)}{1 + i\omega L/R'}.$$

Если $\hat{V}_A(t) = \hat{V}_B(t)$, то $i\omega CR + 1 = i\omega(L/R') + 1$. Отсюда следует, что должно выполняться соотношение

$$CRR' = L.$$

- б) Определяя вещественную часть найденных выражений для $\hat{I}_A$ и $\hat{I}_B$, найдем

$$I_A(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi_A)}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}}, \quad I_B(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t - \varphi_B)}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L^2}},$$

где

$$\varphi_A = \arctg \frac{1}{\omega CR}, \quad \varphi_B = \arctg \frac{\omega L}{R'}.$$

К главе 24. Переходные решения

- 24.1. Если направить ось x вдоль направления движения тела, то уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в форме $x = Ae^{\alpha t}$, то легко найти, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\gamma$. Следовательно, общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$x(t) = A + Be^{-\gamma t}.$$

Задавая начальные условия

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0,$$

находим

$$x(t) = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}),$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\gamma t}.$$

Так как

$$x = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \quad \text{то} \quad e^{-\gamma t} = 1 - \frac{\gamma x}{v_0}.$$

Следовательно,

$$v(x) = v_0 - \gamma x.$$

- 24.2. Для заряда $q(t)$ на обкладках конденсатора можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Поскольку напряжение на конденсаторе связано с зарядом соотношением $q(t)/C = V(t)$, можно написать

$$CR \frac{dV}{dt} + V = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию $V(0) = V_0$, имеет вид

$$V(t) = V_0 e^{-t/RC}.$$

- 24.3. Введя вынуждающую силу F_0 , уравнение движения тела вдоль оси x можно записать в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} = F_0,$$

или

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F_0}{m}.$$

- а) Для установившегося движения скорость тела должна быть постоянной, т. е. $dv/dt = 0$. Отсюда

$$v_{\text{стац}} = \frac{F_0}{m\gamma}.$$

- б) Попытаемся найти решение неоднородного уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F_0}{m}$$

в виде суммы решения однородного уравнения $\dot{v} + \gamma v = 0$ и любого решения неоднородного уравнения. В качестве последнего можно выбрать

$$v_{\text{стац}} = \frac{F_0}{m\gamma} = \text{const.}$$

Так как общее решение однородного уравнения имеет вид $v = Ae^{-\gamma t}$, где A — произвольная константа, то

$$v(t) = \frac{F_0}{m\gamma} + Ae^{-\gamma t}.$$

Непосредственной проверкой мы убеждаемся, что получили самое общее решение исходного уравнения.

- в) Если тело в начальный момент времени $t = 0$ покоилось, то $v(0) = 0$, $x(0) = 0$. Используя первое из этих условий, находим

$$v(t) = \frac{F_0}{m\gamma} (1 - e^{-\gamma t}).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma} t + \frac{F_0}{m\gamma^2} e^{-\gamma t} + B.$$

Учитывая, что $x(0) = 0$, находим

$$B = -\frac{F_0}{m\gamma^2}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma} \left[t - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right].$$

- 24.4.** Для мгновенного значения заряда на обкладках конденсатора можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

Обозначим $\omega^2 = 1/LC$. Тогда написанное выше уравнение приобретает вид уравнения гармонического колебания: $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Начальное условие состоит в том, что при $t = 0$ $V_0 = q(0)/C$ и ток равен нулю, т. е. $dq/dt = 0$. Определяя из этих условий константы A и B , находим

$$q(t) = V_0 C \cos \omega t.$$

- а) Так как в каждый момент времени напряжение на конденсаторе равно $V(t) = q(t)/C$, то

$$V(t) = V_0 \cos \omega t, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- б) Используя этот результат, находим, что запасенная в конденсаторе электростатическая энергия, равная $CV^2/2$, и энергия магнитного поля в катушке, равная $LI^2/2$, изменяются со временем по законам

$$\frac{1}{2} CV_0^2 \cos^2 \omega t \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} CV_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Сумма названных выше энергий, как нетрудно видеть, равна $(1/2) CV_0^2$ — энергии, первоначально запасенной в конденсаторе.

- 24.5. После того как цепь разомкнута, ток будет течь через LC -контур. При этом задача становится эквивалентной задаче 24.4, но с другими начальными условиями. Именно, в данной задаче

$$q(t=0) = 0 \quad \text{и} \quad I(t=0) = \left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_0}{R}.$$

Мгновенное значение заряда на обкладках конденсатора можно представить в виде (см. решение задачи 24.4)

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где $\omega = 1/\sqrt{LC}$. С учетом начальных условий находим напряжение на конденсаторе в любой момент времени $V(t) = q(t)/C$:

$$V(t) = \frac{V_0}{\omega RC} \sin \omega t = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Из этого выражения видно, что максимальное напряжение на конденсаторе (амплитуда напряжения) равно

$$\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- 24.6. а) Уравнение движения тела до включения замедлителя имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \text{ сек}^{-1}.$$

После включения замедлителя уравнение движения имеет другой вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma \frac{dx}{dt} = 0$$

Общее решение последнего уравнения найдено в гл. 24 «Лекций» (вып. 2). Как следует из этого решения, амплитуда колебаний тела уменьшается со временем по закону $\exp(-\gamma t/2)$, причем новый период колебания равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}.$$

За 10 полных циклов, т. е. за время

$$t_0 = \frac{20\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}},$$

по условию задачи амплитуда колебаний уменьшается в 2 раза, т. е. справедливо соотношение $1/2 = \exp(-\gamma t_0/2)$. Отсюда находим

$$\gamma = \sqrt{\frac{4\pi^2}{1/4 + (10\pi/\ln 2)^2}} \approx \frac{\ln 2}{5} \text{ сек}^{-1} \ll \omega_0.$$

Следовательно, в системе единиц МКС

$$5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 0,693 \frac{dx}{dt} + 20\pi^2 x = 0.$$

б) Так как $\gamma \ll \omega_0$, то

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0 [1 - (\gamma^2/8\omega_0^2)]} \approx T_0 \left(1 + \frac{\gamma^2 T_0^2}{32\pi^2} \right) = 1,006 \text{ сек.}$$

в) Если амплитуда уменьшается в 4 раза, то $\exp(-t_1\gamma/2) = 1/4$, т. е. $t_1 \approx (4 \ln 2)/\gamma \approx 20 \text{ сек.}$ Так как период колебания равен $T \approx T_0 = 1 \text{ сек.}$, то уменьшение амплитуды колебания в 4 раза произойдет за 20 полных колебаний, а в 10 раз примерно за 33 или 34 полных колебания.

г) Скорость диссипации энергии, т. е. теряемая из-за сопротивления мощность, равна

$$P = \gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Решение уравнения движения имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(\gamma/2)(t-t_0)} \left\{ A \cos \left[(t-t_0) \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + B \sin \left[(t-t_0) \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \right] \right\} \approx \\ &\approx e^{-(\gamma/2)(t-t_0)} [A \cos \omega_0 (t-t_0) + B \sin \omega_0 (t-t_0)]. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\gamma \ll \omega_0$. Нисколько не уменьшая общности вывода, предположим, что в момент включения затухания, т. е. при $t = t_0$, тело двигалось таким образом, что $A = 0$ (ведь начальное состояние тела в условии задачи не фиксировано!). Отсюда

$$P = \gamma m \omega_0^2 e^{-\gamma(t-t_0)} B^2 \cos^2 \omega_0 (t-t_0).$$

Из этого выражения видно, что скорость диссипации энергии была максимальной при $t = t_0$. В этот момент времени она была рав-

ной $\gamma m \omega_0^2 B^2$. Согласно условию задачи, $B = 0,2 \text{ м}$, $\gamma = 0,139 \text{ сек}^{-1}$, $m = 5 \text{ кг}$, $\omega_0^2 = 4\pi^2 \text{ сек}^{-2}$. Отсюда находим $P = 1,1 \text{ вт}$

24.7. 1. Уравнение движения осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} = \frac{F(t)}{m},$$

где $\omega_0^2 = k/m$.

а) Поскольку при $t \leq 0$ сила на осциллятор не действовала, то в начальный момент времени он покоился (ведь осциллятор с затуханием!). Общим решением уравнения движения при $t > 0$ (дей-

ствующая сила постоянна) является решение

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Учитывая начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, находим

$$A = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}, \quad B = -\frac{\gamma F_0}{2m\omega_0^2 \omega_1}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[1 - e^{-\gamma t/2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right].$$

Мы предполагали выше, что $\omega_0^2 > \gamma^2/4$. В противном случае, когда $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ и, следовательно,

$$\omega_1 = i\kappa_1 = i\sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2},$$

учитывая, что $\sin ix = i \operatorname{sh} x$ и $\cos ix = \operatorname{ch} x$, общее решение запишем в виде

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[1 - e^{-\gamma t/2} \left(\operatorname{ch} \kappa_1 t + \frac{\gamma}{2\kappa_1} \operatorname{sh} \kappa_1 t \right) \right].$$

- б) В этом случае общее решение уравнения движения записывается в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t),$$

где A и B — постоянные интегрирования, которые надлежит определить из начальных условий $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = p_x/m$. В результате находим

$$x(t) = \frac{p_x}{m\omega_1} e^{-\gamma t/2} \sin \omega_1 t.$$

- в) Найдем вначале частное решение уравнения движения. Будем искать его в виде $x_1(t) = D \sin \omega_0 t$. Подставим это выражение в уравнение движения и определим константу D :

$$D = \frac{F_0}{\gamma m \omega_0}.$$

Тогда общее решение уравнения запишется в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \frac{F_0}{\gamma m \omega_0} \sin \omega_0 t$$

Используя начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, в рассматриваемом случае находим

$$A = 0, \quad B = -\frac{F_0}{\gamma m \omega_1}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{\gamma m} \left(\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\omega_1} e^{-\gamma t/2} \sin \omega_1 t \right).$$

2. Будем искать частное решение неоднородного уравнения движения в виде $x_1(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$. Подставляя это выражение в исходное уравнение и приравнивая отдельные коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, находим

$$\begin{aligned} C(\omega_0^2 - \omega^2) + D\omega\gamma &= \frac{F_0}{m}, \\ -C\omega\gamma + D(\omega_0^2 - \omega^2) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$C = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad D = \frac{\omega \gamma F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения движения в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \\ &+ \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega \gamma} \right). \end{aligned}$$

За достаточно большое время $t \gg 2/\gamma$ решение, отвечающее собственным затухающим колебаниям, обратится в нуль, а основными останутся лишь вынужденные колебания. Амплитуда последних имеет резонансную зависимость от частоты. Из приведенного выражения видно, что наибольшей амплитудой обладают колебания с частотой $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma^2/2)}$. При этом амплитуда «резонансного» колебания равна $F_0/m\gamma\omega_1$.

К главе 25. Линейные системы

25.1. Согласно условию задачи,

$$V_{\text{вх}}(t) = V_0 + V_2 \cos \omega t,$$

где $\omega = 2\pi \cdot 120 \text{ сек}^{-1}$. Дифференциальное уравнение, описывающее напряжение на конденсаторе, т. е. $V_{\text{вых}}(t)$, имеет вид

$$CR \frac{dV_{\text{вых}}}{dt} + V_{\text{вых}}(t) = V_{\text{вх}}(t) = V_0 + V_2 \cos \omega t.$$

Решение соответствующего однородного уравнения легко найти. Оно имеет вид

$$V_{\text{вых}}(t) = A \exp(-t/RC).$$

Эта часть решения существенна лишь в начальные моменты работы выпрямительного устройства. За времена, большие, чем RC , она по экспоненциальному закону быстро спадает до нуля, и ею можно в дальнейшем пренебречь.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$V_{\text{вых}}^{(1)}(t) = V_0 + B \cos \omega t + D \sin \omega t.$$

Подставляя $V_{\text{вых}}^{(1)}$ в исходное дифференциальное уравнение и по отдельности приравнявая коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ в обеих частях уравнения, находим

$$V_{\text{вых}}^{(1)}(t) = \frac{V_2}{1 + C^2 R^2 \omega^2} [\cos \omega t + \omega CR \sin \omega t] + V_0.$$

Из этого выражения видно, что постоянная составляющая напряжения остается той же, но амплитуда переменной составляющей уменьшается:

$$V_2' = \frac{V_2}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Подставляя в это выражение $R = 10^3$ ом, $C = 10$ мкф, $\omega = 2\pi \times 120$ сек⁻¹, находим $V_2' = V_2/7,6$, т. е. амплитуда переменной составляющей уменьшается в 7,6 раза.

- 25.2. Дифференциальное уравнение, определяющее изменение во времени напряжения на конденсаторе $V_1(t)$, имеет вид

$$CR \frac{dV_1}{dt} + V_1(t) = V_{\text{вх}}(t)$$

В соответствии со схемой цепи $V_{\text{вх}} = V_1 + V_{\text{вых}}$. Следовательно,

$$V_{\text{вых}} = CR \frac{dV_{\text{вх}}}{dt} - CR \frac{dV_{\text{вых}}}{dt}.$$

Если $|V_{\text{вых}}| \ll |V_{\text{вх}}|$, то получим $V_{\text{вых}}(t) = CR(dV_{\text{вх}}/dt)$.

- 25.3. Используя уравнение для $V_{\text{вых}}$, найденное в предыдущей задаче, запишем

$$V_{\text{вых}} + CR \frac{dV_{\text{вых}}}{dt} = -CRV_0 \omega \sin \omega t.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$V_{\text{вых}} = A \exp(-t/CR) + \frac{CR\omega V_0}{1 + C^2 R^2 \omega^2} (CR\omega \cos \omega t - \sin \omega t).$$

Из этого выражения видно, что условие $|V_{\text{вых}}| \ll |V_{\text{вх}}|$, фигурирующее в предыдущей задаче, сводится к условию $CR\omega \ll 1$, т. е. $T \gg \gg CR$. Следовательно, уже за время, меньшее одного периода колебаний, первый член в выражении для $V_{\text{вых}}$ станет пренебрежимо малым, и выходное напряжение можно представить в виде

$$V_{\text{вых}} = -CRV_0 \omega \sin \omega t = CR \frac{d}{dt} V_{\text{вх}}(t).$$

- 25.4. Простейшей цепью, с помощью которой можно было бы интегрировать входное напряжение, является цепь, показанная на рисунке в условии задачи 25.2, но в которой $V_{\text{вх}}$ и $V_{\text{вых}}$ поменялись местами.

В этом случае, используя результат задачи 25.2, можно написать

$$\frac{d}{dt} V_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{CR} V_{\text{вх}}(t).$$

или

$$V_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{CR} \int V_{\text{вх}}(t) dt$$

- 25.5. а) На тело, сдвинутое на расстояние x от центральной точки, действуют две упругие силы: со стороны правой пружины сила, равная $-kx/2$, и со стороны левой — сила, равная $-kx/2$. Суммарная упругая сила, таким образом, равна $-kx$. В предположении о постоянстве коэффициента трения f сила трения равна по величине fmg (где g — ускорение свободного падения) и направлена всегда против движения. В отсутствие трения движение тела описывалось бы дифференциальным уравнением $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω — частота колебаний, равная $\omega = \sqrt{k/m}$. В течение интервала времени $0 < t < \pi \sqrt{m/k}$, т. е. в первый полупериод колебания, тело двигалось бы влево. Если учесть трение, то при движении влево тело испытывало бы действие силы трения, равной fmg . Уравнение движения для этого временного интервала записывается следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = fg \quad (\omega = \sqrt{k/m}).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + \frac{mfg}{k}.$$

Удовлетворяя начальным условиям $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, находим что для $0 < t < \pi \sqrt{m/k}$

$$x(t) = \left(A - \frac{fmg}{k} \right) \cos \omega t + \frac{mfg}{k}.$$

Из этого решения следует, что в момент времени $t = \pi/\omega$ тело достигнет крайней левой точки $x = -[A - (2mfg/k)]$, остановится, а затем начнет двигаться вправо. Даже без решения уравнения движения в следующий полупериод колебания ясно, что за половину периода сила трения каждый раз приводит к уменьшению амплитуды колебания на величину, равную $2mfg/k$.

- б) Если тело n раз пересечет точку $x = 0$, то из вышеприведенного рассуждения следует, что амплитуда колебания тела станет равной

$$A - n \frac{2mfg}{k}.$$

Чтобы размах колебания тела после n пересечений точки $x = 0$ оставался больше B , необходимо выполнение неравенства

$$B \leq A - n \frac{2mfg}{k},$$

т. е. должно быть

$$A \geq B + n \frac{2mfg}{k}.$$

Вып. 3.

ИЗЛУЧЕНИЕ • ВОЛНЫ • КВАНТЫ

К главе 26. Оптика. Принцип наименьшего времени

26.1. Обозначим через x расстояние от точки K до стены. Тогда время T , затраченное на ходьбу, выражается через x следующим образом:

$$T(x) = \frac{42 - x}{1,5} + \frac{\sqrt{x^2 + 36^2}}{0,9}.$$

Необходимо найти значение $x = x_0$, при котором это время минимально. Определим его из условия, чтобы первая производная dT/dx обращалась в нуль при $x = x_0$:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_0} = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получаем квадратное уравнение $1,8\sqrt{x_0^2 + 36^2} - 3x_0 = 0$. Его положительный корень $x = 27$, что соответствует $AK = 15$ м.

Решим теперь задачу, используя «закон преломления»

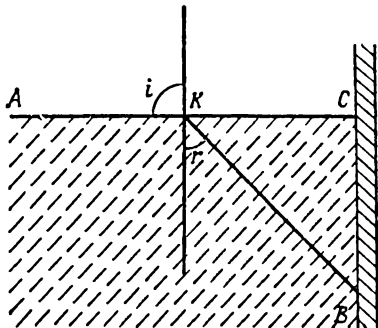
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

где v_1, v_2 — скорость ходьбы пешехода соответственно по тротуару и по вспаханному полю, углы i и r показаны на рисунке. Поскольку $i = 90^\circ$,

$$\sin r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5}.$$

Из рассмотрения треугольника KBC находим

$$KC = BC \operatorname{tg} r = 27 \text{ м.}$$



- 26.2. Обозначим угол, образуемый нормалью к пластине с лучом, через α (он равен углу падения), угол преломления через β , толщину пластины через l . Тогда по условию задач

$$\alpha = \beta + 30^\circ \quad \text{и} \quad n = 1,5 = \frac{\sin(\beta + 30^\circ)}{\sin \beta} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\beta = \operatorname{arccctg}(3 - \sqrt{3}) = 38,26^\circ.$$

Отсюда

а)
$$PP' = \frac{l \sin 30^\circ}{\cos \beta} = 0,127 \text{ м.}$$

- б) Время прохождения в воздухе $t = l \text{ м/с}$ (c — скорость света в воздухе). При наличии пластины полное время прохождения

$$t' = t - \frac{l \cos 30^\circ}{c \cos \beta} + \frac{ln}{c \cos \beta}.$$

Подставляя численные данные, получаем

$$\frac{t - t'}{t} \approx 16\%.$$

- 26.3. Пусть b — толщина края линзы, d — ее толщина по оси, $h = 0,1 \text{ м}$ — ее радиус. Тогда времена прохождения равны: для «периферического» луча

$$t' = \frac{2\sqrt{(SC - b/2)^2 + h^2} + bn}{c},$$

для «центрального» луча

$$t = \frac{2SC + d(n - 1)}{c}.$$

Приравнявая эти времена, получаем соотношение для определения d . Подставляя в него численные значения, получаем $d \approx 20 \text{ мм}$.

- 26.4. В действительности у зеркального изображения меняются местами не «правая и левая рука», а «лицо и затылок» — зеркало выворачивает изображение вдоль оси, перпендикулярной поверхности зеркала, а оси справа налево и сверху вниз не преобразуются вовсе.
- 26.5. Потому что мы видим в таком зеркале изображение, полученное двукратным отражением.
- 26.6. Разберем лишь нетривиальный случай, когда падающий луч испытывает трехкратное отражение. Для этого он должен быть не параллелен ни одной из плоскостей, образующих трехгранный угол. В противном случае он испытывает не больше двух отражений и движется все время в одной плоскости.

Очевидно, справедливы следующие два утверждения:

- а) углы, являющиеся проекциями углов падения и отражения на любую плоскость, перпендикулярную отражающей плоскости, равны между собой;
- б) отраженный и падающий лучи проецируются на отражающую плоскость в одну прямую.

Рассмотрим проекцию хода луча на каждую из граней угла. Из двух высказанных утверждений следует, что это будет лома-

ная линия из трех отрезков, у которой смежные отрезки образуют равные углы с линиями пересечения двух остальных граней угла с рассматриваемой гранью. Следовательно, отрезки этой ломаной, не имеющие общих точек, параллельны. Эти отрезки будут проекциями падающего и выходящего лучей на рассматриваемую плоскость. Две линии, проекции которых на все координатные плоскости параллельны, являются параллельными прямыми, что и доказывает утверждение задачи.

Широкое практическое применение трехгранный отражающий угол находит в так называемых «катафотах» — рифленых стеклах, отражающих падающий свет обратно, в направлении источника. Кроме того, на том же принципе было основано действие уголкового отражателя, установленного на «Луноходе». Этот прибор использовался для определения с большой точностью расстояния до Луны с помощью посланного с Земли и отраженного обратно лазерного луча.

- 26.7. Показатель преломления для перехода луча из оптически более плотной среды в менее плотную $n_{12} < 1$. Согласно закону преломления, $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 / n_{12}$. Когда $\sin \theta_1$ становится больше n_{12} , равенство не может выполняться, поскольку $\sin \theta_2$ не может быть больше единицы, и, следовательно, преломления не происходит — свет отражается от границы раздела, как от зеркала (явление «полного внутреннего отражения»).

К главе 27. Геометрическая оптика

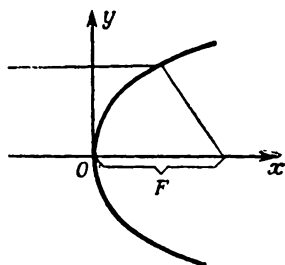
- 27.1. Время распространения осевого луча должно быть равно времени распространения произвольного луча, проходящего через точку с координатами x и y , расположенную на преломляющей поверхности. Разность этих времен равна

$$\frac{x}{c} + \frac{n \sqrt{y^2 + (F - x)^2}}{c} - \frac{nF}{c},$$

где c — скорость света в воздухе.

Приравняв эту разность нулю, получаем искомое уравнение поверхности. Разрешая его относительно y , приходим к выражению

$$y = \pm \frac{1}{n} \sqrt{2xFn(n-1) - x^2(n^2-1)}.$$

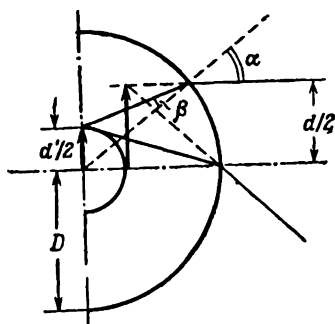


- 27.2. На рисунке показан поперечный разрез капиллярной трубки. Нужно построить изображение радиуса капиллярного отверстия, создаваемое стенкой трубки, которая действует как толстая цилиндрическая линза. Способ построения ясен из чертежа; из закона преломления и рассмотрения треугольников на рисунке вытекают следующие соотношения:

$$d = D \sin \alpha, \quad \sin \alpha = n \sin \beta,$$

$$\frac{d'}{D} = \frac{\sin \beta}{\sin (180^\circ - \beta - 90^\circ + \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\cos (\alpha - \beta)}.$$

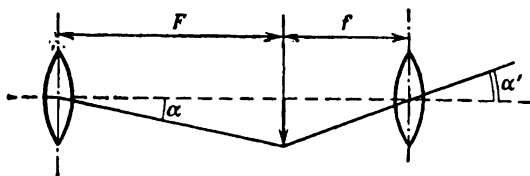
Исключая из них α и β , можно получить довольно громоздкое точное выражение для d через d' , D и n . Интересно получить простое приближенное выражение для случая, когда $d \ll D$. Тогда углы α и β (и, следовательно, $\alpha - \beta$) малы,



и в точном выражении $d = nd' \times \cos(\alpha - \beta)$, следующем из выписанных соотношений, можно положить в первом приближении косинус равным единице. Тогда $d = nd'$.

27.3. Эта поверхность — эллипсоид вращения с фокусами в точках P и P' (см. § 4 гл. 26 «Лекций», вып. 3, стр. 15).

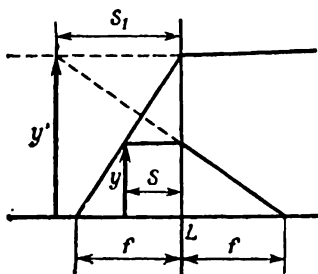
27.4. Двукратно применяя формулу для увеличения линзы (см. § 4 гл. 23 «Лекций», вып. 3, стр. 31), находим, что увеличение этой оптической системы (которая является простейшей зрительной трубой) равно F/f .



27.5. Поскольку глаз располагается вплотную за линзой, он может рассматривать лишь мнимое изображение, располагающееся по ту же сторону линзы, что и предмет (см. рисунок). В случае мнимого изображения он должен быть расположен, таким образом, между фокусом и линзой. В формуле линзы расстояние S_1 от линзы до мнимого изображения нужно брать отрицательным

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f}, \quad S = \frac{fS_1}{S_1 + f},$$

где S — монотонная функция от S_1 , следовательно, она принимает максимальное и минимальное значения $S_{\max}$ и $S_{\min}$ на концах интервала изменения S_1 :



$$S_{\max} = 5 \text{ см} \quad (S_1 = \infty),$$

$$S_{\min} = 4,16 \text{ см} \quad (S_1 = 25 \text{ см}).$$

Эти значения и определяют границы, в которых должен быть помещен рассматриваемый предмет. В первом случае увеличение равно бесконечности, во втором оно составляет около 6.

- 27.6. Пусть $S = 10$ м — расстояние от предмета до положительной линзы, Δ — расстояние между линзами, которые расположены в точках O_1 и O_2 соответственно (см. рисунок).

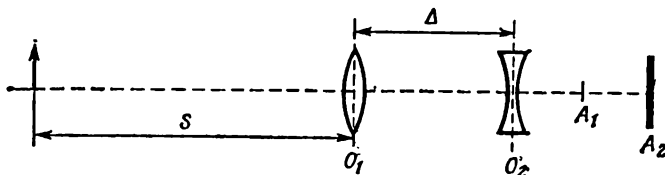
Положительная линза создает изображение предмета в точке A_1 ; это изображение «рассматривается» отрицательной линзой, которая создает изображение предмета в точке A_2 , где и должна быть помещена фотопластинка. Нужно найти расстояние O_2A_2 . Для этого можно дважды последовательно применить уравнение линзы в виде $x \cdot x' = f^2$. В первом случае $x_1 = S - f_1$, $x'_1 = O_1A_1 - f_1$; отсюда определяем

$$O_1A_1 = f_1 + x'_1 = f_1 + \frac{f_1^2}{x_1} = 30.93 \text{ см},$$

$$O_2A_1 = 3.43 \text{ см}.$$

Во втором случае $x_2 = -f_2 - O_2A_1 \approx 6.57$ см. Искомое расстояние

$$O_2A_2 = x'_2 - f_2 = \frac{f_2^2}{x_2} + 10 \text{ см} \approx 25.22 \text{ см}.$$



- 27.7. В обоих случаях нужно найти величину x' — расстояние от главного фокуса до изображения; $x' = f^2/x$, где f — фокусное расстояние, а x — расстояние до Луны или спутника. В случаях (а) и (б) соответственно получаем значения (расстояние до Луны считаем равным 380 000 км)

$$x' = 6.73 \cdot 10^{-2} \text{ мм и } 80 \text{ мм}.$$

- 27.8. Из определения главных плоскостей оптической системы следует их важное свойство: если точка находится в главной плоскости на расстоянии y от оптической оси, то ее изображение получается в другой главной плоскости на том же расстоянии от оптической оси. Этим свойством главных плоскостей мы и воспользуемся для решения задачи. Построение изображения точки, расположенной в главной плоскости, показано на рисунке. Очевидны следующие соотношения:

$$y = f \operatorname{tg} \varphi = F \operatorname{tg} \Phi, \quad y' = (D - f) \operatorname{tg} \varphi = (f' + x) \operatorname{tg} \Phi.$$

Из уравнения линзы для L' следует также

$$f'^2 = x' (D - f - f').$$

Исключая отсюда углы φ и Φ , а также расстояние x , получаем

$$F = \frac{f f'}{D - f - f'}, \quad \Delta' = f' + x' + F = \frac{f' D}{D - f - f'}.$$

29.2. При указанной частоте расстояние между соседними излучателями равно четверти длины волны, и, следовательно, полная разность фаз между ними в зависимости от угла равна $\Delta\varphi = (\pi/2) (1 - \sin \theta)$. Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату модуля амплитуды, можно воспользоваться результатом задачи 28.1 (б). Подставив в него $N = 4$ и возводя в квадрат, находим

$$I = |A|^2 = \frac{\sin^2 [\pi (1 - \sin \theta)]}{\sin^2 [\pi (1 - \sin \theta)/4]}.$$

29.3. На рисунке схематически изображен радиотелескоп с расстоянием между чашами (приемниками) 1 и 2, равным d . Телескоп регистрирует сигналы от удаленного источника. Малое изменение углового положения источника приводит к фазовому сдвигу $\Delta\varphi$ между сигналами, поступающими в приемники. Этот сдвиг по общей формуле связан с углом $\Delta\theta$ следующим образом:

$$\Delta\varphi = \frac{d \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot 2\pi}{\lambda}$$

(λ — длина волны радиоизлучения). Сигналы равной амплитуды A от двух приемников смешиваются (векторно складываются), поэтому интенсивность I выходного сигнала

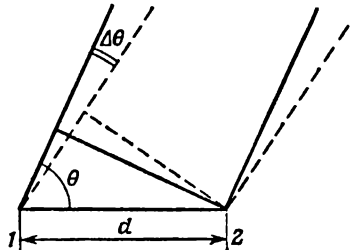
$$I = 2A^2 (1 + \cos \Delta\varphi) = 4A^2 \cos^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) \approx 4A^2 \left[1 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{4} \right].$$

По условиям задачи минимально регистрируемое колебание интенсивности равно 10%, что соответствует $(\Delta\varphi)^2/4 = 0,1$. Отсюда, полагая $\sin \theta \approx 1$, находим

$$\Delta\varphi = \sqrt{0,4} = 0,63 = 2\pi \frac{480}{0,5} \Delta\theta.$$

Следовательно,

$$\Delta\theta \approx 10^{-4} \text{ рад} = 21''.$$

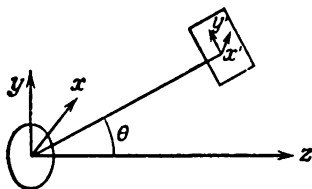


29.4. Круговое движение можно представить как сумму двух гармонических колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях с разностью фаз $\pi/2$ (см. § 1 гл. 33 «Лекций», вып. 3, стр. 119). Компоненты электрического поля в плоскости, перпендикулярной лучу (см. рисунок; оси x и x' параллельны друг другу), в соответствии с формулой (29.3) «Лекций» (вып. 3, стр. 51) записываются в виде

$$E_{y'} = -q \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{a\omega^2 \cos [\omega (t - r/c)]}{4\pi\epsilon_0 r c^2},$$

$$E_{x'} = -q \frac{a\omega^2 \cos [\omega (t - r/c) - \pi/2]}{4\pi\epsilon_0 r c^2}.$$

В плоскости орбиты $E_y = 0$, и интенсивность излучения пропорциональна $\cos^2 [\omega(t - r/c) - \pi/2]$. На оси орбиты вектор электрического поля сохраняет свою длину и равномерно вращается, поэтому интенсивность от времени не зависит и вдвое превышает среднюю интенсивность в плоскости орбиты на том же расстоянии от источника.



- 29.5. Амплитуда излучения в направлении, образующем угол $\pi/2 - \theta$ к линии диполей в экваториальной плоскости, имеет вид (в комплексной форме; см. решение задачи 28.1)

$$A = r(1 + e^{i\Delta\varphi_1}) \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi_1}.$$

Здесь N — число диполей в каждой линии; r — амплитуда каждого диполя; $\Delta\varphi_1 = \pi \sin \theta$ — сдвиг фаз между соседними диполями в каждой линии; $\Delta\varphi_2 = (\pi/2)(1 - \sin \theta)$ — сдвиг фаз между соответствующими диполями в разных линиях. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей; следовательно, интенсивность равна

$$I \sim |A|^2 = \frac{2r^2 \sin^2 \varphi_2 \cdot \sin^2 N \Delta\varphi_1}{\sin^2 \Delta\varphi_1}.$$

Распределение интенсивности, получающееся для одного ряда диполей, в случае двойного ряда диполей «модулируется» множителем

$$2 \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} (\sin \theta - 1) \right].$$

- 29.6. Ускорение каждого из электронов равно $a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0)$, и все электроны можно рассматривать как осцилляторы, излучающие в фазе. Если ρ — число электронов на единицу длины проволоки и их полное число равно $L\rho$, то искомое поле вычисляется по общей формуле

$$E = \frac{-q_e L \rho a \omega^2 \cos[\omega(t - r/c) + \varphi_0]}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin \theta.$$

- 29.7. В этом случае вектор напряженности электрического поля излучения лежит в вертикальной плоскости и длина его пропорциональна $\sin \theta$ (см. рисунок в условии задачи). Следовательно, интенсивность излучения на заданном расстоянии от источника, пропорциональная среднему квадрату напряженности, может быть записана в виде $I = C \sin^2 \theta$ (C — подлежащая определению постоянная).

Константу C при заданном значении R можно найти, приравняв полный поток излучения через сферу радиусом R в единицу времени (т. е. интеграл от I по сфере) полной мощности передатчика:

$$\int I dS = 2\pi R^2 C \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = C \frac{8\pi}{3} R^2 = 0,5 \text{ вт}.$$

При $R = \sqrt{2} \cdot 2,5 \cdot 10^4 \text{ м}$, $C = 0,5 \text{ вт} \cdot 3/(8\pi R^2) = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ вт/м}^2$. По условиям задачи $\theta = 45^\circ$, поэтому искомая интенсивность равна

$$I(45^\circ) = \frac{C}{2} = 0,25 \cdot 10^{-10} \text{ вт/м}^2.$$

К главе 30. Дифракция

30.1. Разрешающая способность связана с порядком спектра и числом линий решетки n соотношением $\lambda/\delta\lambda = m/n$. По условиям задачи $m = 1$, $\Delta\lambda = 5,90 \text{ А}$, $\lambda = 5900 \text{ А}$. Отсюда $n = 1000$, что при плотности линий $600/\text{мм}$ соответствует длине решетки $1,7 \text{ мм}$.

30.2. Угловая разрешающая способность глаза $\theta = 1,22 \lambda/L$, где λ — длина волны света, а L — диаметр зрачка. Приравнивая эту величину углу l/R , под которым интервал между фарами l виден с расстояния R , получаем

$$R = \frac{lL}{1,22\lambda} = 8,3 \text{ км.}$$

Сложный спектральный состав белого света затрудняет разрешение двух источников — «изображения» их, соответствующие длинноволновой части спектра, сливаются раньше.

30.3. а) Щель спектрографа параллельна оси, вокруг которой поворачивается решетка, поэтому независимо от угла ее поворота длина изображения щели на экране P (а это и есть ширина спектральной полосы) определяется увеличением системы из двух линз, которое равно F_2/F_1 . Следовательно,

$$h' = \frac{hF_2}{F_1}.$$

(Не путать ширину *полосы* с шириной *линии* в спектре.)

б) Условие, при котором максимум интенсивности для заданной длины волны соответствует направлению, совпадающему с осью C_2 , т. е. углу выхода точно θ_d , имеет вид

$$\lambda = \frac{d}{m} |\sin \theta_d - \sin \theta_l| = \frac{1}{Nm} |\sin \theta_d - \sin \theta_l| = 10^7 \text{ А}$$

(m — порядок спектра, λ — длина волны).

в) Искомое расстояние равно $D = F_2 \Delta\theta_d$, где $\Delta\theta_d$ — разность между углами, которые соответствуют максимумам с разницей длин волн 1 А при фиксированном угле θ_l . Дифференцируя соотношение $\sin \theta_d = \sin \theta_l + m\lambda/d$, получаем $\cos \theta_d \Delta\theta_d = m\Delta\lambda/d$. Отсюда при $\Delta\lambda = 1 \text{ А}$ получаем $D = F_2 m N \cdot 10^{-7} / \cos \theta_d$.

г) Решение аналогично случаю (а) с той разницей, что *ширина* изображения щели в отличие от длины меняется при поворотах решетки и линзы C_2 пропорционально $\cos \theta_l / \cos \theta_d$. Следовательно,

$$w' = \frac{w F_2 \cos \theta_l}{F_1 \cos \theta_d}.$$

30.4. а) $\sin \theta_l = -\sin \theta_d = \sin \theta$ и условие максимума имеет вид $2 \sin \theta = m\lambda/d$. Подставляя численные значения, получаем $\sin \theta \approx 0,788$, $\theta \approx 51,96^\circ$.

- б) Искомые линии содержатся в спектрах других порядков m_i , и их длины волн связаны с длиной волны λ из п. (а) соотношениями $\lambda_i = 5\lambda/m_i$. В пределах видимого спектра укладываются три такие линии, соответствующие $m_i = 7, 6, 4$ с длинами волн $\lambda_i = 3750, 4375$ и 6560 Å.
- в) Линию 5250 Å можно отделить от остальных трех, подобрав соответствующий фильтр. Общий способ получения сразу спектра высокого порядка состоит в обеспечении значительной начальной разности фаз, соответствующей нескольким длинам волн, между соседними штрихами решетки. Он реализуется в решетках со ступенчатым профилем (см. решение задачи 30.6).
- г) Используя решение задачи 30.3 (в) и подставляя в полученное там выражение для D угол θ , вычисленный в п. (а) данной задачи, получаем $D = 11,2$ мм (в предположении, что из указанных в условии размеров *длине* решетки соответствует 25 см).
- д) $\delta\lambda = \lambda/mn$, где n — полное число линий на решетке. Отсюда $\delta\lambda = 0,007$ Å.

30.5. Разрешающая способность характеризует то уширение спектральной линии, которое создается дифракционной решеткой. Нельзя, конечно, различить две спектральные линии, расстояние между которыми гораздо меньше, чем это уширение, но длину волны *уединенной* линии определяют по положению *максимума* интенсивности, а ошибка при измерении положения максимума может быть во много раз меньше, чем это уширение.

30.6. а) Прежде всего должны быть в фазе лучи, рассеянные разными «осцилляторами», принадлежащими поверхности одной ступеньки, т. е. от каждой из них свет для получения максимальной интенсивности должен отражаться по закону «угол падения равен углу отражения». Кроме того, должны находиться в фазе лучи от соседних ступенек. Следовательно, для направления, в котором решетка «блестит», должны выполняться два условия:

$$\varphi = \theta_b, \quad (1)$$

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (2)$$

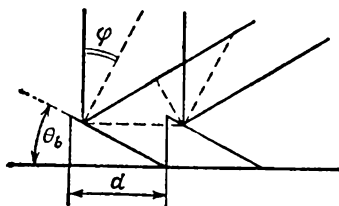
где m — порядок спектра. При значительной величине угла равенство (2) может выполняться лишь для достаточно высоких порядков.

- б) Искомый угловой интервал можно определить, используя равенство (2). Он равен изменению, которое испытывает угол φ , когда при фиксированном m длина волны λ пробегает весь интервал значений $\Delta\lambda$, соответствующий видимому спектру. Дифференцируя (2), получаем

$$2d \Delta\varphi \cos \varphi = m \Delta\lambda.$$

Подставляя сюда $\varphi = \theta_b$, имеем

$$\Delta\varphi = \frac{m \Delta\lambda}{2d \cos \theta_b}.$$



§ 0.7. При каждом отражении амплитуда волны умножается на R , а фаза при каждом пересечении зазора увеличивается на $2\pi D/\lambda$. Амплитуда волны, прошедшей извне в зазор, испытавшей $2n$ отражений и $2n$ раз пересекшей зазор между поверхностями, дается выражением

$$A_n = TA_0 (R e^{i2\pi D/\lambda})^{2n}.$$

Суммарная амплитуда волны, падающей на правую поверхность,

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \frac{TA_0}{1 - R^2 e^{i4\pi D/\lambda}},$$

а полная интенсивность равна A^2 . Следовательно, отношение интенсивности прошедшего света к начальной интенсивности

$$\frac{I}{I_0} = \frac{T^2 |A|^2}{A_0^2} = \frac{T^4}{|1 - R^2 e^{i4\pi D/\lambda}|^2}.$$

При $R \approx 1$, как видно из полученного выражения, для тех длин волн, при которых фаза экспоненты равна четному числу π , интенсивность прошедшего света может быть близка к единице. На этом свойстве и основано использование интерферометра как узкополосного оптического фильтра. Полученный результат может показаться парадоксальным: уже в результате первого отражения от границы зазора отражается доля начальной интенсивности, равная R^2 , а согласно полученной формуле, свет проходит через интерферометр почти целиком. Однако в действительности противоречия нет — волна, отраженная от правой границы зазора, интерферирует вне зазора с волной, отраженной от левой границы, и гасит ее, т. е. фактически отражения почти не происходит.

К главе 31. Как возникает показатель преломления

31.1. Воспользовавшись формулой для показателя преломления

$$1 - n = \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

(см. «Лекции», формула (31.19), вып. 3, стр. 93) и считая $\omega_0 \ll \omega$, находим

$$1 - n = 6,5 \cdot 10^{-7}.$$

Экспериментально найденное значение составляет

$$1 - n = 8,4 \cdot 10^{-6}.$$

31.2. Порядка 10^6 см^{-3} .

31.3. б) При $\omega = \omega_0$ вещественная n' и мнимая n'' части показателя преломления равны $n' = 1$ и $n'' = Nq^2/2\epsilon_0 m\gamma\omega$. Поскольку интенсивность световой волны пропорциональна E^2 , то, используя формулу, приведенную в п. (а) условия данной задачи, находим

$$I = I_0 \exp(-Nq^2 z / \epsilon_0 m \gamma \omega).$$

- 31.4. а) Здесь удобно воспользоваться выражением для напряженности электрического поля

$$E(t) = - \frac{qa(t - r/c) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 cr},$$

созданного зарядом q на расстоянии r от него в момент времени t , в направлении θ от оси движения заряда (см. «Лекции», формула (29.1), вып. 3, стр. 49). Здесь $a(t)$ — ускорение заряда, равное, очевидно, $-\omega^2 x_0 \cos \omega t$. Следовательно,

$$E(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 \cos[\omega(t - r/c)]}{r} \sin \theta.$$

Поскольку плотность потока энергии в электромагнитной волне равна $\epsilon_0 c E^2$, то мощность S , излучаемая через единицу поверхности на расстоянии r под углом θ , равна

$$S = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2 \cos^2[\omega(t - r/c)]}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta.$$

Чтобы найти полную энергию P , излучаемую в единицу времени электроном, усредним S за период движения ($\cos^2 \omega t = 1/2$) и умножим S на площадь, приходящуюся на элемент телесного угла $d\Omega$, т. е. на $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Интегрируя затем по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до π , находим

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

- б) По определению константа затухания $\gamma_R = P/W$, где W — энергия, запасенная за одно колебание. Отсюда

$$\gamma_R = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{m\omega^2 x_0^2} = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi m\epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3}.$$

- в) Из равенства $\lambda = 2\pi c/\omega$ находим

$$\begin{aligned} |\Delta\lambda| &= \frac{2\pi c |\Delta\omega|}{\omega^2} = \frac{2\pi c}{\omega^2} \gamma_R = \frac{q^2}{3\pi m\epsilon_0 c^2} = \frac{4\pi r_0}{3} = \\ &= 0,74 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} \left(r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м} \right). \end{aligned}$$

К главе 32. Радиационное затухание. Рассеяние света

- 32.1. Работа радиационной силы в единицу времени, усредненная за один период колебаний $2\pi/\omega$, дается выражением

$$W_P = \frac{\omega}{2\pi} \frac{2e^2}{3\pi c^3} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{d^3 x}{dt^3} \frac{dx}{dt} dt.$$

В нашем случае

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставляя это выражение под интеграл и проведя интегрирование, убеждаемся, что средняя работа радиационной силы трения равна

средней энергии, измеряемой за это же время (см. предыдущую задачу).

- 32.2. Рассмотрим слой единичной площади и бесконечно малой толщины dx , расположенный перпендикулярно падающему свету. Тогда изменение интенсивности dI света в этом слое равно произведению самой интенсивности на вероятность того, что свет рассеется в этом объеме, где располагается $N dx$ рассеивающих центров. Суммарная эффективная площадь рассеяния равна сумме эффективных сечений рассеяния всех центров в слое (поскольку dx бесконечно малая величина, элементарные площадки σ не перекрываются друг с другом), т. е. $N\sigma dx$. Вероятность рассеяния в выделенном слое равна отношению площади $N\sigma dx$ к единичной площади поверхности слоя, т. е. численно равна $N\sigma dx$. Отсюда

$$dI = -IN\sigma dx, \text{ или } \frac{dI}{dx} = -IN\sigma.$$

Интегрируя получившееся уравнение с учетом граничного условия $I|_{x=0} = I_0$, находим

$$I = I_0 e^{-N\sigma x}.$$

- 32.3. Выражение для показателя преломления света имеет следующий вид [см. «Лекции», формула (31.19), вып. 3, стр. 93]:

$$n - 1 = \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} = 2\pi N c^2 \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Возводя обе части этой формулы в квадрат и поделив левую и правую части получающегося выражения на соответственно левую и правую части выражения для σ , получаем соотношение, из которого требуемый результат вытекает непосредственно.

- 32.4. Воспользуемся результатами задач 32.2 и 32.3. Для воздуха $n - 1 = 0,000292$; при атмосферном давлении число молекул в единице объема $N = 6 \cdot 10^{23} / 22\,400 = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Толщина атмосферы, приведенная к постоянному давлению 1 атм, равна $h \approx 10 \text{ км}$. Интенсивность солнечного излучения, прошедшего в атмосфере путь x ,

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} = I_0 e^{-\frac{2(n-1)^2}{3\pi N} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 x}. \quad (1)$$

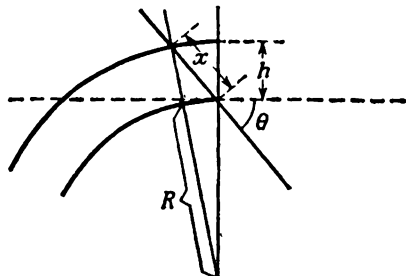
Зависимость x от угла θ , под которым Солнце стоит над горизонтом можно определить геометрически (см. рисунок). Поскольку $h \ll R$ (R — радиус Земли) мы имеем

$$x \approx h / \sin \theta.$$

Подставляя в это выражение соответствующие углы из условия задачи, получаем

$$a) \ x(90^\circ) = h, \quad б) \ x(10^\circ) = 5,620h.$$

Таким образом, из выражения (1) находим $I(90^\circ)/I_0 \approx 78\%$, $I(10^\circ)/I_0 \approx 24\%$.



32.5. Проверить поперечность излучения и поляризовать его можно при рассеянии на свободных электронах (см. § 2 гл. 33 «Лекций», вып. 3, стр. 121).

32.6. Для проведения расчетов необходимо сделать конкретизирующие предположения о распределении электронов в околосолнечном пространстве. Для требуемой оценки можно предположить, что они равномерно заполняют сферу радиусом вдвое больше солнечного.

Свет, рассеянный в K -короне свободными электронами, равномерно излучается во все стороны и определяет яркость свечения короны. Если считать, что каждый квант света рассеивается не больше чем один раз, то на расстоянии, равном солнечному радиусу, рассеивается доля полного солнечного излучения, равная

$$r' = 1 - e^{-N_e \sigma R}; \quad (1)$$

здесь N_e — искомая плотность электронов, а $\sigma = 8\pi/3(e^2/mc^2)^2 = 6,25 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ — томсоновское сечение рассеяния. Этот рассеянный свет излучается сферой, радиус которой вдвое, а поверхность вчетверо больше поверхности Солнца. Поэтому отношение ее яркости к яркости солнечного диска (яркость в данном случае определяется количеством квантов, испускаемых единицей площади поверхности в единицу времени) равно $r = r'/4$. Поскольку для рассеянного излучения величина $N_e \sigma R$ и, следовательно, показатель экспоненты в выражении (1) малы, то можно воспользоваться приближенной формулой $e^{-x} \approx 1 - x$. Тогда, приравняв r численному значению из условия задачи, получаем $r = 10^{-8} = N_e \sigma R/4$. Подставляя $R = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}$, вычисляем

$$N_e = \frac{4r}{\sigma R} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{6,25 \cdot 10^{-25} \cdot 7 \cdot 10^{10}} \approx 10^6 \text{ см}^{-3}.$$

32.7. В гл. 31 «Лекций» получено выражение, связывающее количество энергии излучения, проходящего в 1 сек через 1 м^2 поверхности, со средней напряженностью поля излучения в этой точке: $S = e_0 c \langle E \rangle^2$ (S имеет размерность вт/м^2 , а $E = \text{в/м}$). Используя формулу для джоулева тепла $Q = V^2/R$, убеждаемся, что величина $e_0 c$ имеет размерность обратного сопротивления (проводимости). Численное значение $1/e_0 c = 377 \text{ ом}$.

32.8. Пока размер частицы R меньше длины волны λ , все рассеивающие атомы излучают с близкими фазами, а интенсивность рассеянного света и сечение рассеяния примерно пропорциональны N^2 (N — число атомов в частице) т. е.

$$\sigma \sim N^2 \sim R^6.$$

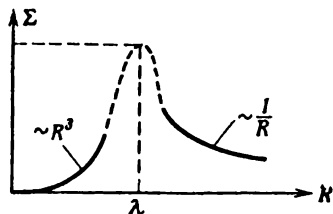
Тогда сечение рассеяния единицей массы $\Sigma = \sigma n \sim R^3$ ($n \sim 1/R^3$ — число частиц в единице массы). При $R > \lambda$ ситуация меняется — внутри непрозрачной частицы больших размеров свет не проникает, он рассеивается и поглощается лишь атомами, расположенными на поверхности. В этом случае суммарное сечение поглощения и рассеяния примерно равно поперечному сечению частицы: $\sigma \sim \pi R^2$, а $\Sigma \sim \sim 1/R$. Такой случай схематически показан на рисунке. Значит, эффективность рассеяния единицей массы достигает максимума при-

мерно при $R = \lambda$ и при этом $\sigma \approx \pi \lambda^2$. Для оценки можно воспользоваться этим приближенным соотношением. По условиям задачи $N_1 \sigma x = \ln 100$, где N_1 — число частиц в единице объема, а x — расстояние до звезды. Искомая масса на единицу площади дается выражением

$$M = N_1 x m = \frac{m \ln 100}{\sigma},$$

где m — масса одной частицы. Подставляя сюда $m = (\frac{4}{3})\pi \lambda^3 \rho$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ (плотность льда) и $\lambda = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ (видимый свет), получаем

$$M = 3 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^2.$$



- 32.9. а) Сечение рассеяния определяется как отношение полной энергии, излучаемой рассеивающим телом в 1 сек, к энергии луча, излучаемой радиолокационной станцией и падающей на 1 м² рассеивающего тела в 1 сек. Все электроны проволоки вследствие ее малой длины можно считать колеблющимися в фазе; тогда можно воспользоваться результатами задачи 29.6, где было получено выражение для поля излучения на больших расстояниях r от проволоки под углом θ к ее оси. Перепишем полученное там выражение в обозначениях данной задачи:

$$E = -q_e \frac{N \chi E_{\parallel} \omega^2}{4\pi e_0 r c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varphi_0 \right] \sin \theta.$$

Интенсивность излучения $S = e_0 c (E^2)$. Интегрируя ее по сфере радиусом r (см. § 2 гл. 32 «Лекций», вып. 3, стр. 106) и подставляя затем среднее по времени значение квадрата косинуса, равное 0,5, получаем среднюю энергию, излучаемую по всем направлениям:

$$P = \frac{N^2 \chi^2 \omega^4 q_e^2 E_{\parallel}^2}{12\pi e_0 c^3}.$$

Относя ее к среднему потоку энергии в радиолокационном луче $P_p = e_0 c E_0^2/2$, получаем выражение для сечения:

$$\sigma = \frac{N^2 \chi^2 \omega^4 q_e^2}{6\pi e_0^2 c^4} \left(\frac{E_{\parallel}}{E_0} \right)^2.$$

б) Мы имеем

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \theta,$$

где θ — угол между проволокой и направлением падающей волны. В этом случае

$$\sigma \sim \cos^2 \theta.$$

К главе 33. Поляризация

- 33.1. Если начальный пучок неполяризован, то при начальной амплитуде A_0 амплитуда волны после прохождения последовательных поляроидов становится равной $A_0/\sqrt{2}$, $A_0 \cos \theta/\sqrt{2}$ и $A_0 \cos \theta \sin \theta/\sqrt{2}$ соответственно. Поэтому окончательная интенсивность

$$I = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta.$$

- 33.2. Выберем ось x вдоль оси первого поляроида и примем амплитуду неполяризованного светового пучка за единицу. Тогда после прохождения первого поляроида для составляющих амплитуд по осям имеем

$$A_x^{(1)} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad A_y^{(2)} = \frac{e}{\sqrt{2}}.$$

После прохождения второго поляроида

$$A_x = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{e}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \alpha,$$

$$A_y = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{e}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) e.$$

Окончательная интенсивность прошедшего света

$$\begin{aligned} I &= I_0 (A_x^2 + A_y^2) = \\ &= I_0 \left[\frac{1}{2} (\alpha^4 + e^4) \cos^2 \theta + \alpha^2 e^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + e^2) \alpha e \sin (2\theta) \right]. \end{aligned}$$

- 33.3. При падении света под углом Брюстера прошедший и отраженный лучи взаимно перпендикулярны, т. е. $\sin r = \cos i$. Следовательно,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{\sin i}{\cos i} = \operatorname{tg} i,$$

что и требовалось доказать.

- 33.4. Из решения задачи 29.4 следует, что в случае (а) излучение поляризовано по кругу, а в случае (б) оно линейно поляризовано в плоскости орбиты. Там же были получены формулы для интенсивности.

- 33.5. Сдвиг фаз вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d,$$

где d — расстояние, пройденное светом. Полагая $\varphi = \pi/2$ и производя вычисления, находим

$$d = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

- 33.6. Используя формулы Френеля для интенсивности отраженных волн с различными поляризациями, получаем для неполяризованного света

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} (|b|^2 + |B|^2) = \frac{\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}}{2}$$

($i = 80^\circ$ по условию задачи). Зная коэффициент преломления воды $n = 1,66$, находим $r = 48^\circ$. Для этих численных значений $I/I_0 = 35\%$. При $r = 90^\circ$, т. е. для касательных лучей полученное выражение дает $I/I_0 = 1$.

- 33.7. а) Доля отраженного света при нормальном падении на поверхность равна

$$\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = 17\%.$$

- б) Угол Брюстера $\varphi = \arctg n = 67,5^\circ$.

- 33.8. Рассмотрим общий случай, когда плоскость поляризации падающего света с амплитудой A образует с осью угол θ . Тогда амплитуда обыкновенной компоненты $A_o = A \cos \theta$, а необыкновенной $A_e = A \sin \theta$. Сдвиг фаз между компонентами на выходе равен

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 0,01 \cdot 1,67 \cdot 10^{-2}}{4,1 \cdot 10^{-4}} \approx 0,8\pi.$$

Таким образом, вектор амплитуды вышедшей волны можно записать в виде

$$A = A_o \cos \omega t + k A_e \cos (\omega t - 0,8\pi)$$

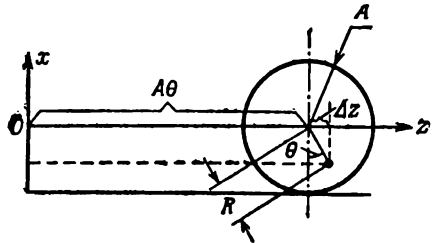
— эллиптически поляризованный свет (см. «Лекции», фиг. 33.2, вып. 3, стр. 119).

- 33.9. Оценить показатель преломления можно, отражая от обсидиановой пластинки свет, поляризованный в плоскости падения, и меняя угол падения. Резкий спад интенсивности отраженного света будет замечен, когда угол падения станет равным углу Брюстера для обсидиана, а тангенс этого угла как раз равен показателю преломления (см. «Лекции», гл. 33, вып. 3, стр. 126).

К главе 34. Релятивистские явления в излучении

- 34.1. Смещение точки по вертикали равно $x = -R \cos \theta$ (см. рисунок). Горизонтальное смещение складывается из смещения, вызванного поступательным движением и равного $A\theta$ (диск катится без скольжения), и смещения $\Delta z = R \sin \theta$ в результате вращательного движения. Таким образом,

$$z = A\theta + R \sin \theta.$$



Искомое ускорение находим двукратным дифференцированием x по t_1

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{d\theta} / \frac{dt}{d\theta}.$$

Найдем $dx/d\theta$ и $dt/d\theta$:

$$\frac{dx}{d\theta} = R \sin \theta, \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{c} \frac{dz}{d\theta} \frac{A + R \cos \theta}{c}.$$

Аналогично

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d}{d\theta} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right) / \frac{dt}{d\theta} = c^2 \frac{AR \cos \theta + R^2}{(A + R \cos \theta)^3}.$$

- 34.2. В полученном в предыдущей задаче выражении для ускорения заменим $R \cos \theta$ на $-x$, а A на cR/v . В результате имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{c^2 x (1 - vR/xc)}{R^2 (1 - vx/cR)^3}.$$

- 34.3. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату поля, а оно в свою очередь пропорционально «запаздывающему» ускорению частицы. Это ускорение фактически вычислено в предыдущей задаче (см. § 2 гл. 34 «Лекций», вып. 3). Полагая $x = R$ и скорости равными $+v$ и $-v$, получаем

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left| \frac{d^2x}{dt^2}(v) / \frac{d^2x}{dt^2}(-v) \right|^2 = \left(1 + \frac{v}{c} \right)^4 / \left(1 - \frac{v}{c} \right)^4.$$

- 34.4. Выберем ось x неподвижной системы координат по направлению движения Земли, а ось y — по направлению луча (предполагая, что оно перпендикулярно оси x). Оси движущейся системы координат, связанной с Землей, обозначим x' и y' соответственно, направив их параллельно осям x и y . Проекция волнового вектора света звезды в неподвижной системе по условию равна $k_x = 0$, $k_y = \omega/c$. Скорость движущейся системы относительно неподвижной равна v . Согласно преобразованию Лоренца,

$$k_{x'} = \frac{k_x + \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad k_{y'} = k_y.$$

Следовательно, в системе координат, связанной с Землей, волновой вектор образует с осью y угол, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_{x'}}{k_{y'}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

отсюда получаем для угла aberrации $\sin \theta = v/c$.

- 34.5. Масса покоя электрона $m_e = 0,5 \text{ Мэв} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гэв}$. Следовательно, при энергии 1 Гэв значение $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/2000$. Отсюда $(c - v)/c \approx (1/8) \cdot 10^{-4}$.

- 34.6. Звезда приближается со скоростью примерно 500 км/сек .

- 34.7. Ответ: 600 ммк .

- 34.8. Непосредственное наблюдение aberrации позволяет вычислить скорость Земли по орбите из соотношения $\operatorname{tg} \varphi = v/c$ (φ — угол aberrации). Отсюда $v = \operatorname{ctg} \varphi = 30 \text{ км/сек}$. Приравняв центробежную силу силе солнечного притяжения, получим

$$G = \frac{m_3 m_C}{R^2} = \frac{v^2}{R} m_3.$$

Масса Земли m_3 сокращается. Подставляя значения солнечной массы и гравитационной постоянной $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}$, получаем

$$R = \frac{G m_C}{v^2} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км.}$$

34.9. а) Сила гравитационного притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца. Сила светового давления пропорциональна импульсу, переданному частице за единицу времени поглощенным излучением, а импульс в свою очередь — энергии излучения на единицу площади, т. е. интенсивности ($\sim L^{-2}$). Таким образом, силы светового давления и притяжения одинаково зависят от L , и их отношение, следовательно, постоянно.

б) Если обозначить интенсивность солнечного излучения через W , то сила светового давления, т. е. импульс, переданный в единицу времени, равен

$$F = \frac{dP}{dt} = W c \pi R^2.$$

Приравнявая эту величину силе притяжения

$$F_g = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho v^2}{L},$$

где L — радиус земной орбиты, а v — скорость движения Земли по ней, вычисленные в предыдущей задаче, получаем

$$R = \frac{3}{4} \frac{W c L}{\rho v^2} = \frac{0,6}{\rho} \text{ мк},$$

если выражать ρ в $\text{г}/\text{см}^3$.

К главе 38. Соотношения между волновой и корпускулярной точками зрения

38.1. В § 3 гл. 32 «Лекций» (вып. 3, стр. 109) при классическом рассмотрении были получены выражения для ширины спектральной линии

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c \Delta\omega}{\omega^2} = \frac{\lambda}{Q}$$

и для «времени жизни» возбужденного состояния свободного атома (временн., в течение которого энергия убывает в e раз за счет излучения)

$$\Delta T = \frac{Q}{\omega}$$

(здесь Q — классическая величина радиационного затухания). Если записать энергию возбужденного состояния в соответствии с квантовыми представлениями как $E = \hbar\omega$, то с помощью вышеприведенных соотношений получаем квантовое соотношение неопределенностей для энергии и времени:

$$\Delta E \cdot \Delta T = \hbar \Delta\omega \cdot \Delta T = \frac{\hbar \lambda \omega^2}{2\pi c Q} \cdot \frac{Q}{\omega} = \hbar.$$

Заметим далее, что «неопределенность положения» фотона Δx есть по смыслу длина отвечающего ему волнового пакета, равная $c\Delta T$.

Неопределенность импульса Δp связана с шириной спектральной линии $\Delta\lambda$ и равна $\Delta p = (h/\lambda^2)\Delta\lambda$ (поскольку $p = h/\lambda$). Таким образом,

$$\Delta x \cdot \Delta p = h \frac{c \Delta T \Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{h}{\pi} = \hbar.$$

- 38.2. В задачу об определении радиуса электронной орбиты входят следующие константы: постоянная Планка $\hbar$, масса электрона m и константа, характеризующая силу притяжения между электроном и протоном; в качестве такой величины возьмем e^2 ($e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$). Размерности этих констант соответственно: энергия $\times$ время, масса, энергия $\times$ длина. Вспоминая размерность энергии, нетрудно убедиться, что единственной комбинацией этих констант, имеющей размерность длины, является $\hbar^2/m_e^2 = a_0$. Это и есть боровский радиус. Используя соотношение неопределенностей $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar$ и считая, что точность локализации электрона в атоме $\Delta x \approx a_0$, получаем $\Delta p \approx \hbar/a_0$. Кинетическая энергия, соответствующая такому импульсу,

$$\Delta E = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{a_0^2 2m} = \frac{\hbar^2 m e^4}{\hbar^4 2m} \approx 20 \text{ эв}.$$

Эта энергия по порядку величины равна искомой энергии ионизации.

- 38.3. Частоты ω_i , соответствующие трем перечисленным линиям с длинами волн λ_i , равны $\omega_i = 2\pi c/\lambda_i$. Согласно комбинационному принципу Ритца (см. § 5 гл. 38 «Лекций», вып. 3, стр. 234), из этих трех частот можно скомбинировать другие, равные разностям или суммам исходных. Поскольку исходные линии соответствуют ультрафиолетовой области, а искомые — видимой и инфракрасной областям, то частоты искоемых линий должны быть меньше исходных, следовательно, их разностями. Соответствующие длины волн удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_k} \quad (\lambda_k > \lambda_i)$$

и равны 4860, 6560 и 18 800 Å.

К главе 39. Кинетическая теория газов

39.1.

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{и} \quad TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}.$$

39.2. Процесс сжатия воздуха можно считать адиабатическим. Следовательно, используя результат предыдущей задачи, можно написать соотношение

$$T_1 P_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 P_2^{(1-\gamma)/\gamma},$$

где индексами 1 и 2 помечены температура и давление воздуха до и после сжатия. Из этого соотношения следует

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 145^\circ \text{C}.$$

39.3. а) В первом процессе газ, расширяясь, не совершает никакой работы. Следовательно, его энергия, а потому и температура остаются постоянными, т. е. $T = T_0$. Так как $V = 2V_0$, из закона идеального газа следует, что $P = P_0/2$.

б) Во втором процессе (адиабатическом) газ совершает работу. Для гелия $\gamma = 5/3$. Следовательно, в конечном состоянии

$$P = P_0 \cdot 2^{-3/2}, \quad T = T_0 \cdot 2^{-1/2}, \quad V = 2V_0,$$

где P_0 , V_0 , T_0 — давление, объем и температура газа гелия в исходном состоянии.

39.4. а) Рассмотрим два горизонтальных сечения цилиндра: на высотах h и $h + dh$. Разность давлений на этих высотах равна весу жидкости или газа в столбике высотой dh и единичной площадью, взятому с противоположным знаком (ясно, что давление уменьшается с высотой):

$$dP = P(h + dh) - P(h) = -\rho(h) g dh.$$

Отсюда и следует искомое уравнение.

б) Плотность воздуха связана с давлением и температурой соотношением

$$\rho(h) = \frac{\mu P(h)}{TR},$$

которое следует из закона идеального газа $PV = NkT$. Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{\mu g P}{RT}.$$

Интегрируя, находим $P = P_0 \exp(-\mu gh/RT)$, где P_0 — давление у поверхности Земли, т. е. при $h = 0$.

- 39.5. а) Поскольку для адиабатической атмосферы справедливо соотношение $P\rho^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma}$, где P_0 и ρ_0 — давление и плотность атмосферы на поверхности Земли, то, согласно решению задачи 39.1, справедливо и соотношение

$$TP^{(1-\gamma)/\gamma} = T_0P_0^{(1-\gamma)/\gamma},$$

откуда

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Дифференцируя левую и правую части этого соотношения по высоте и учитывая уравнение $dP/dh = -\rho(h)g$ (см. решение задачи 35.4), находим

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{T_0\rho_0}{P_0} g \frac{(\gamma-1)}{\gamma}.$$

Согласно закону идеального газа, $\rho_0 T_0 / P_0 = \mu / R$, где μ — молекулярный вес, R — газовая постоянная. Таким образом, окончательно находим

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g (\gamma-1)}{R\gamma}.$$

Так как для воздуха $\mu = 29$, $\gamma = 1,4$, то $dT/dh = 9,75$ К/км.

- б) Атмосфера может находиться в механическом равновесии (в ней не будет происходить макроскопических движений), не находясь при этом в тепловом равновесии. Зависимость давления газа от высоты, найденная в п. (а) решения задачи 39.4, являющаяся условием механического равновесия, может иметь место и при непостоянной температуре в атмосфере. В связи с этим возникает вопрос, при каких же условиях такое равновесие будет устойчивым?

Если условие устойчивости не выполняется, в атмосфере возникнут течения, стремящиеся перемешать газ атмосферы и выровнять ее температуру, т. е. возникает так называемая конвекция. Чтобы выяснить условие устойчивости атмосферы, предположим, что два элемента газа (оба единичной массы), находившиеся на разных высотах (разность высот Δh), поменялись местами. Если при этом энергия системы уменьшится, это значит, что такой обмен выгоден и первоначальное распределение неустойчиво. Напротив, если энергия системы в целом увеличится, первоначальное распределение устойчиво. Переходя к вычислению энергии, заметим, во-первых, что потенциальная энергия, обусловленная силой тяжести, не меняется — обмениваются местами элементы одинаковой массы. Далее, при обмене местами элементов совершается работа, равная $P\Delta V$, ΔV — разность объемов элементов газа. Эта работа идет на изменение энергии газа, окружающего выделенные нами элементы. Кроме того, за счет разности температур меняется

и энергия самих выделенных элементов U , и, следовательно, полное изменение энергии равно

$$\Delta U + P \Delta V.$$

Таким образом, условие устойчивости атмосферы можно записать в виде

$$\frac{dU}{dh} + P \frac{dV}{dh} > 0,$$

или, если воспользоваться формулой $U = PV/(\gamma - 1)$.

$$\frac{V}{(\gamma - 1)} \frac{dP}{dh} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} P \frac{dV}{dh} \geq 0.$$

Используя далее закон идеального газа $V = RT/\mu P$, получаем

$$P \frac{dV}{dh} = \frac{R}{\mu} \frac{dT}{dh} - V \frac{dP}{dh}.$$

Подставляя последнее соотношение в левую часть приведенного выше неравенства и учитывая тот факт, что $dP/dh = -\rho g$, находим

$$\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{R}{\mu} \frac{dT}{dh} + V \rho g \geq 0.$$

Отсюда следует условие устойчивости атмосферы относительно конвекции:

$$\frac{dT}{dh} \geq - \frac{V \rho g \mu}{R} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} = - \frac{\mu g (\gamma - 1)}{R \gamma}.$$

39.6. Работа, затрачиваемая при изотермическом процессе на сжатие от объема V_1 до объема V_2 , равна

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - N k T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = 10^5 \text{ Дж}.$$

39.7. При адиабатическом сжатии идеального газа выполняется соотношение $PV^\gamma = \text{const}$. Следовательно,

$$P_A = P_0 \cdot 2^{1/2}, \quad P_B = P_0 \cdot 2^{1/3}.$$

39.8. Работу, необходимую для адиабатического сжатия, легко найти, если учесть, что $P_0 V_0^\gamma = P V^\gamma$:

$$R = - \int_{V_0}^{V_0/2} P dV = - P_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_0/2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} [2^{(\gamma-1)} - 1].$$

Поэтому

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{(\gamma_B - 1)}{(\gamma_A - 1)} \frac{(2^{(\gamma_A-1)} - 1)}{(2^{(\gamma_B-1)} - 1)} = 1,13.$$

39.9. Для конечного состояния системы можно написать уравнения

$$PV_1 = N_1 k T_1 \quad \text{и} \quad PV_2 = N_2 k T_2 = (N - N_1) k T_2,$$

где N — полное число молекул газа. Число N нетрудно найти, если написать уравнение идеального газа для исходного состояния системы: $N = P_0(V_1 + V_2)/kT_0$, где P_0 и T_0 — начальные давление и температура системы. Подставляя во второе из написанных уравнений выражение для N_1 , полученное из первого уравнения $N_1 = PV_1/kT_1$, сразу находим

$$P = P_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{(V_1 + V_2)}{[V_2 + (T_2/T_1) V_1]} = 842 \text{ мм рт. ст.}$$

39.10. Обозначим через P_1 , N_1 и P_2 , N_2 давления и числа молекул в большом и малом резервуарах после нагрева до температуры $T = 162^\circ\text{C} = 435 \text{ К}$. По условию задачи $P_1 = P_2 = P_0 = 800 \text{ мм рт. ст.}$ Обозначим через N полное число молекул газа. Очевидно, $N = N_1 + N_2 = PV_1/kT_0$, где $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$ — атмосферное давление, $T_0 = 17^\circ\text{C} = 290 \text{ К}$ — начальная температура. Для конечного состояния можно написать два уравнения:

$$(P_0 + P_2) V_1 = N_1 k T$$

и

$$P_2 V_2 = N_2 k T = (N - N_1) k T = N k T - N_1 k T.$$

Решая эту систему уравнений относительно P_2 , находим

$$P_2 = \frac{N k T - P_0 V_1}{V_1 + V_2} = \frac{V_1}{(V_1 + V_2)} \left(P \frac{T}{T_0} - P_0 \right) = 200 \text{ мм рт. ст.}$$

39.11. Обозначим через N начальное число молекул четырехоксида азота. Так как молекулярный вес N_2O_4 равен 92, очевидно, что $N = 0,9 N_0/92$. Число молекул в сосуде после испарения и диссоциации равно PV/kT . Пусть доля диссоциировавших молекул составляет x , т.е. в сосуде имеется $2xN$ молекул NO_2 и $(1-x)N$ молекул N_2O_4 . Отсюда

$$2xN + (1-x)N = PV/kT,$$

и

$$x = \frac{PV}{NkT} - 1.$$

Подставляя численные значения, находим, что доля диссоциировавших молекул N_2O_4 составляет около 13%.

39.12. Тепло $Q = 8,31 \text{ вт} \cdot \text{ч}$, сообщенное телу при постоянном давлении, можно представить в виде

$$Q = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1).$$

Следовательно,

$$\text{а) } T_2 = T_1 + \frac{2Q}{5R} = 1740 \text{ К.}$$

б) В конечном состоянии газа $P_1 V_2 = R T_2$. Учитывая, что в начальном состоянии $P_1 V_1 = R T_1$, находим $V_2/V_1 = T_2/T_1 = 5,8$. Работа, совершенная газом, равна

$$W = P_1 (V_2 - V_1) = R (T_2 - T_1) = \frac{2}{5} Q = 3,32 \text{ вт} \cdot \text{ч}.$$

Энергия газа равна

$$U = \frac{3}{2} RT_2 = 21\,700 \text{ Дж.}$$

К главе 40. Принципы статистической механики

- 40.1. Пусть в единицу времени о каждую сторону крылышка ударяется v молекул. После удара о зачерненную сторону молекула уносит энергию Δe , которую следует определить из условия $\Pi = \Delta e \cdot v$. Если через $\bar{v}$ обозначить среднюю скорость молекул газа, то уносимый молекулами импульс Δp связан с Δe простым соотношением

$$\Delta e = \frac{\bar{p} \Delta p}{m} = \bar{v} \Delta p.$$

Разность сил, действующих на рассматриваемое крылышко, равна изменению импульса крылышка за единицу времени. Следовательно, $F = \Delta p \cdot v = \Pi / \bar{v}$. Разумеется, при строгом решении задачи следовало бы учесть, что изотропно отскакивающие молекулы уносят различные значения импульса, так как они вылетают под разными углами с поверхности. Однако при этом мы получили бы численный коэффициент, который был бы порядка единицы. Столь же нестрого определим среднюю скорость молекул как скорость, удовлетворяющую соотношению: $m\bar{v}^2/2 = \bar{e} = 3kT/2$, т. е. $\bar{v} = \sqrt{3kT/m}$.

Окончательно находим

$$F \approx \frac{\Pi}{\sqrt{3kT/m}}.$$

- 40.2. Пусть поверхность сосуда совпадает с плоскостью yz , а ось x перпендикулярна ей. Тогда число частиц в единице объема dn_{v_x} , проекции скоростей которых на ось x заключены в интервале $v_x, v_x + dv_x$, дается выражением

$$dn_{v_x} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x,$$

где n_0 — число частиц газа в единице объема. Ясно, что из этих частиц только те достигнут за единицу времени поверхности сосуда, т. е. плоскости yz , которые расположены от нее не далее расстояния, численно равного v_x , т. е. их число равно

$$v_x n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x.$$

Следовательно, полное число частиц, которые за единицу времени достигнут поверхности сосуда, равно

$$\nu = \int_0^{\infty} n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} v_x e^{-mv_x^2/2kT} dv_x = \frac{n_0 \bar{v}}{4},$$

где $\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$ — средняя тепловая скорость молекулы газа.

Скорость $\bar{v}$ дается распределением Максвелла:

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv.$$

Следовательно, можно записать

$$v = n_0 \pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv.$$

Перейдем в получившемся интеграле к новой переменной $\epsilon = mv^2/2$ — энергии частиц:

$$v = \frac{2n_0\pi}{m^2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon.$$

Из последнего выражения видно, что величину

$$dv_{\epsilon} = n_0 \frac{2\pi}{m^2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$$

можно интерпретировать как число молекул, которые достигают единичной площадки поверхности сосуда в единицу времени, если их энергия заключена в пределах $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$.

а) Используя последний результат, находим, что число молекул, достигших единичной площадки поверхности сосуда с энергией больше тепловой, т. е. с $\epsilon > \bar{\epsilon} = (3/2) kT$, равно

$$\frac{2\pi n_0}{m^2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{(3/2)kT}^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon = \frac{\bar{v} n_0}{4} \frac{5}{2} e^{-3/2}.$$

Следовательно, искомая доля молекул равна $(3/2) \exp(-1,5) = 0,55$.

б) $(11/2) \exp(-4,5) = 0,061$.

40.3. Теплоемкость при постоянном объеме определяется как производная от внутренней энергии газа по температуре: $C_V = dU/dT$.

а) Так как внутренняя энергия 1 моля одноатомного газа равна $U = (3/2) RT$, то $C_V = (3/2) R = 12,4 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$.

б) Для двухатомного газа $U = (7/2) RT$ и $C_V = (7/2) R = 29,1 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$.

40.4. Законы сохранения массы, импульса и энергии требуют, чтобы потоки этих величин слева и справа от сетки равнялись друг другу (с учетом выделяемого сеткой тепла).

Проще всего записать закон сохранения массы. Если j — плотность потока массы, то величина jA равна массе газа, проходящей через поперечное сечение трубы в единицу времени. Пусть ρ и ρ' — плотности газа перед и за сеткой. Согласно закону сохранения массы,

$$j = \rho v = \rho' v'.$$

Найдем далее выражение для потока импульса. В газе, который как целое покоится, плотность потока импульса, очевидно, равна

$$nm \langle v_x^2 \rangle,$$

где n — число молекул газа в единице объема, а скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по максвелловскому распределению скоростей. Действительно, импульс одной молекулы в направлении к сетке (выберем его за направление оси x) равен mv_x , а поток импульса mv_x^2 . Если умножить mv_x^2 на n , то получаемая при этом величина равна плотности потока импульса в направлении оси x , обусловленного всеми частицами, компонента скорости которых равна v_x . Поскольку в газе частицы распределены по скоростям, величину ρv_x^2 ($\rho = mn$) следует усреднить. При этом получаем естественный результат: плотность потока импульса равна P — давлению газа [см. § 2 гл. 39 «Лекций», формула (39.5), вып. 4, стр. 10]. Если же газ как целое движется со скоростью v в направлении оси x , то простое обобщение формулы для плотности потока импульса приводит к выражению

$$\rho \langle (v_x + v)^2 \rangle = P + \rho v^2 = P + jv.$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что $\langle v_x \rangle = 0$.

Учтем далее, что на выходе из трубы газ приобретает давление окружающего воздуха. Тогда закон сохранения импульса можно записать в виде

$$A j v' = A j v - F$$

где F — сила тяги: в соответствии с третьим законом Ньютона величина $-F$ есть импульс, переданный газу в единицу времени. Таким образом,

$$F = A j (v - v').$$

Запишем теперь закон сохранения энергии. Для этого, рассуждая по аналогии, найдем выражение для плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} \rho \left\langle \left[\frac{(v_x + v)^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} \right] (v_x + v) \right\rangle = \\ = \frac{\rho}{2} \langle (v_x + v)^3 \rangle + \frac{\rho}{2} \langle (v_y^2 + v_z^2) v_x \rangle + \frac{\rho v}{2} \langle v_y^2 + v_z^2 \rangle. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \langle (v_y^2 + v_z^2) v_x \rangle &= 0, \quad \langle v_x^3 \rangle = 0, \\ \langle (v_y^2 + v_z^2) \rangle &= 2 \langle v_x^2 \rangle, \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{3\rho v}{2} \langle v_x^2 \rangle + \frac{\rho v^3}{2} + \rho v \langle v_x^2 \rangle = \left(\frac{3}{2} \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) j.$$

Внимательно взглядевшись в наши выкладки, мы видим, что слагаемое $(3/2)P/\rho$ есть не что иное, как U — энергия единицы массы газа, который как целое покоится. Как отмечалось в «Лекциях», множитель $3/2$ появляется лишь в рассматривавшемся выше случае одноатомного газа. В общем случае его нужно заменить на $1/(\gamma - 1)$, где γ — газовая постоянная. Если это сделать, то закон сохранения энергии в данной задаче с учетом того, что сетка не оказывает сопротивления потоку газа, запишется в виде

$$\left[\frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{v^2}{2} \right] j + \frac{q}{A} = \left[\frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho'} + \frac{v'^2}{2} \right] j'.$$

Используя записанный выше закон сохранения массы и вводя обозначение $\gamma P/\rho = \gamma PT/\mu = c_s^2$, где c_s — скорость звука, из закона сохранения энергии получаем квадратное уравнение для v' :

$$\frac{2c_s^2}{(\gamma-1)v} (v' - v) + v'^2 - v^2 - \frac{2q}{jA} = 0.$$

Решая его, находим

$$a) \quad v' = \sqrt{\left(v + \frac{c_s^2}{(\gamma-1)v}\right)^2 + \frac{2q}{jA}} - \frac{c_s^2}{(\gamma-1)v}.$$

б) Из закона идеального газа имеем $T'/T = \rho/\rho' = v'/v$ и, следовательно,

$$T' = T \left[\sqrt{\left(1 + \frac{c_s^2}{(\gamma-1)v^2}\right)^2 + \frac{2q}{jAv^2}} - \frac{c_s^2}{(\gamma-1)v^2} \right].$$

в) Сила тяги, развиваемая такой трубой, очевидно, равна

$$F = Aj(v - v') = -Aj \left[\sqrt{\left(v + \frac{c_s^2}{(\gamma-1)v}\right)^2 + \frac{2q}{jA}} - \left(v + \frac{c_s^2}{(\gamma-1)v}\right) \right].$$

40.5. Основной характеристикой, определяющей достоинства двигателя, является его к. п. д. Он равен отношению полезной мощности, развиваемой двигателем, к скорости полных энергетических затрат. Если реактивный двигатель развивает силу тяги F , а скорость полета v , то, очевидно, полезная мощность, развиваемая им, равна Fv . С другой стороны, полная затраченная в единицу времени энергия равна $q = GH$, где G — расход горючего в единицу времени, а H — теплотворная способность горючего. Если для силы тяги воспользоваться выражением, полученным в задаче 40.4, то

$$\begin{aligned} \text{К. п. д.} &= \frac{Fv}{q} = \\ &= \frac{Ajv^2}{q(\gamma+1)} \left[\left(\frac{c_s^2}{v^2} - 1 \right) - \sqrt{\left(\frac{c_s^2}{v^2} - 1 \right)^2 - \frac{2(\gamma^2-1)q}{jAv^2}} \right]. \end{aligned}$$

При достаточно малых скоростях и величинах q можно разложить подкоренное выражение по q . При этом оказывается, что к. п. д. двигателя не зависит от q и определяется только скоростью полета:

$$\text{К. п. д.} \approx \frac{v^2(\gamma-1)}{c^2}.$$

Так как, согласно условию задачи $\gamma = 1.4$ и, кроме того, при нормальных условиях $c = 340$ м/сек, то, принимая скорость v равной обычной крейсерской скорости полета реактивных самолетов, т. е. примерно 800 км/час, находим к. п. д. $\approx 12\%$.

40.6. б) $y_m = e^{-1} = 0,368$.

40.7. $h_{\oplus} = 8,8$ км, $h_{\odot} = 113$ км.

К главе 41. Броуновское движение

- 41.1. а) $T = 11\,600\text{ К}$.
 б) $kT = 0,025\text{ эв}$.
 в) $\lambda = 12\,395 \cdot 10^{-8}\text{ см} = 1,24\text{ мкм}$.

$$41.2. \text{ а) } I = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \sim T^4.$$

б) Для новой переменной $x = \hbar\omega/kT$ условие $dI/d\omega = 0$ записывается следующим образом: $x = 3[1 - \exp(-x)]$. Численное решение этого уравнения дает $x_m = 2,822$. Следовательно, $\omega_m = 2,822\text{ кТ}/\hbar \sim T$.

41.3. Из условия задачи 41.2 находим

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\exp(\hbar\omega/kT_1) - 1}{\exp(\hbar\omega/kT_2) - 1}.$$

Так как заданная длина волны отвечает $\hbar\omega/k = 4,64 \cdot 10^4\text{ К}$, то

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \exp\left[\frac{\hbar\omega}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = e^{11,6}.$$

К главе 42. Применения кинетической теории

42.1. $1\text{ эв/атом} = 96\,520\text{ дж/г}\cdot\text{моль}$.

42.3. $\Delta n/n = (W/kT)(\Delta W/W)$, где $\Delta W/W = 3\%$ — относительная ошибка в определении теплоты возгонки. Следовательно, ошибка при расчете плотности паров ртути в $W/kT = 2,4$ раз больше, т.е. $\sim 7\%$.

42.4. При температурах $T < 300^\circ\text{С}$ наличие свободных электронов в Si объясняется ионизацией примесных центров. При $T > 300^\circ\text{С}$ наступает так называемая собственная проводимость: все примесные атомы уже ионизованы, а экспоненциальное уменьшение сопротивления связано с термическим отрывом электронов проводимости от атомов кремния. На этот отрыв требуется большая энергия, чем для отрыва электрона от примесного атома. В этом случае доля ионизованных атомов мала и из формулы (42.8) «Лекций» можно найти, что число электронов и ионизованных атомов одинаково и пропорционально $\exp(-W/2kT)$. Так как сопротивление обратно пропорционально числу свободных электронов, то $\rho \sim \exp(W/2kT)$. Используя график, приведенный в условии задачи, можно при $T > 300^\circ\text{С}$ приблизительно оценить W — энергию, необходимую для отрыва электрона от атома (она называется шириной запрещенной зоны для полупроводников). Определенная таким способом величина W оказывается приблизительно равной $1,2\text{ эв}$, что хорошо согласуется с другими данными о ширине запрещенной зоны в Si.

К главе 43. Диффузия

43.1. Длина свободного пробега равна $l = 1/n\sigma_c$. Если молекулы рассматривать как твердые шарики, то сечение столкновения $\sigma_c = \pi d^2$. Согласно закону идеального газа, число молекул в единице объема газа равно $n = P/kT$, где P — давление газа. Следовательно,

$l = kT/\pi Pd^2$. Средняя скорость молекулы в идеальном газе $\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$. Следовательно, $\tau = l/\bar{v} = \sqrt{mkT}/\sqrt{8\pi Pd^2}$. Отсюда при нормальных давлении и температуре для молекул кислорода ($m = 5,35 \cdot 10^{-27}$ кг, $n = 2,68 \cdot 10^{25}$ м⁻³) имеем

$$l = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \quad \tau = 2 \cdot 10^{-10} \text{ сек.}$$

43.2. Вероятность того, что молекула пройдет путь L без столкновений, равна $\exp(-L/l)$. Из N молекул путь L пройдут без столкновения $N \exp(-L/l)$ молекул. Если, как это дано в условии задачи, $N \exp(-L/l) < 1/2$, то $L > l \ln(2N) \approx 56 l$.

43.3. При решении задачи можно рассуждать так: для одной молекулы, на которую в среднем в газе приходится внутренняя энергия $U = kT/(\gamma - 1)$ имеется 6 равноправных направлений движения. Поэтому через выделенную плоскость в одном направлении в среднем будет проходить поток энергии, равный $Q_+ = (1/6)n\bar{v}U(-l)$, а в противоположном — поток энергии $Q_- = (1/6)n\bar{v}U(+l)$ (n — число молекул в единице объема, $\bar{v}$ — средняя скорость молекул в газе). Кроме того, мы считаем, что все молекулы, летящие к выделенной плоскости, испытывают последние столкновения на расстоянии l от площадки (и приобретают энергию, равную средней тепловой), а дальше движутся без столкновений.

Результирующий поток энергии через единицу поверхности плоскости равен (в отсутствие конвекции потоки $n\bar{v}$ слева и справа одинаковы)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{d\dot{E}}{dt} &= Q = Q_+ - Q_- = \frac{1}{6} n\bar{v} [U(-l) - U(l)] = \\ &= \frac{n\bar{v}k}{6(\gamma - 1)} [T(-l) - T(l)] = - \frac{n\bar{v}k}{6(\gamma - 1)} \frac{dT}{dx} 2l \end{aligned}$$

(молекулы, находящиеся на расстояниях $-l$ слева и $+l$ справа от выделенной плоскости).

Из того факта, что $(1/A)(dE/dt) = -\kappa(dT/dx)$, следует

$$\kappa = \frac{n\bar{v}kl}{3(\gamma - 1)} = \frac{1}{3} C\bar{v}l,$$

где

$$C = \frac{nk}{(\gamma - 1)}$$

— теплоемкость единицы объема газа. Множитель $1/3$ в формуле для κ (равно как и в формуле для коэффициента диффузии для газа [см. «Лекции», формула (43.27) вып. 4]) получен в результате приближительного расчета и не заслуживает особого доверия. По этой причине он опущен в формуле (43.42) «Лекций» (вып. 4) и в условии задачи.

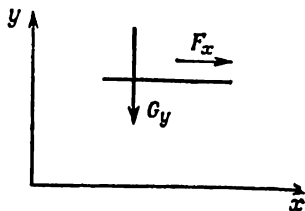
43.4. Будем рассуждать так же, как и при решении задачи 43.3, заменяя U на mv_x — импульс упорядоченного движения частиц газа. Поток импульса через площадку, перпендикулярную оси y , равен

$$G_y = \frac{1}{6} n\bar{v} [mv_x(-l) - mv_x(l)] = - \frac{1}{3} mn\bar{v}l \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Легко сообразить (см. рисунок), что на площадку будет действовать сила в направлении оси x , причем $F_x = -G_y$. Таким образом, в соответствии с нашим рассмотрением

$$\eta = \frac{1}{3} mn\bar{v}l.$$

По поводу коэффициента $1/3$ см. замечания в решении 43.3.



- 43.5. Рассуждая так же, как и при решении задачи 43.3, найдем результирующий поток энергии между заданными поверхностями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = Q &= \frac{1}{6} n\bar{v}U(0) - \frac{1}{6} n\bar{v}U(d) = \\ &= \frac{1}{6} \frac{n\bar{v}k}{(\gamma - 1)} [T(0) - T(d)] = \frac{n\bar{v}k}{6(\gamma - 1)} \Delta T. \end{aligned}$$

Отличие этого результата от полученного в задаче 43.3 состоит в том, что в ответ не входит средняя длина свободного пробега. Если формально попытаться ввести «градиент температуры» следующим образом: $\Delta T/d$, то полученный результат отвечает замене $2l$ на d в выражении для κ , полученном в решении задачи 43.3.

Переносимый поток импульса между плоскостями, расположенными на расстоянии $d \ll l$ друг от друга и скользящими относительно друг друга со скоростью Δv , найдем, используя подход, изложенный в решении задачи 43.4, заменив лишь $2l(\partial v_x / \partial y)$ на Δv :

$$\frac{F}{A} = \frac{mn\bar{v}}{6} \Delta v.$$

- 43.6. Подвижность иона массой m в газе определяется его средней скоростью $\bar{v}$ и длиной свободного пробега l :

$$\mu = \frac{l}{m\bar{v}}.$$

По условию задачи средние скорости ионов одинаковы во всех газах, так как температура газов одна и та же.

Если n_A и n_B — плотности числа молекул в исходных газах A и B , то можно написать соотношения

$$\frac{1}{\mu_A} = m\bar{v}\sigma_A n_A, \quad \frac{1}{\mu_B} = m\bar{v}\sigma_B n_B,$$

где σ_A и σ_B — полные сечения рассеяния иона на молекулах сортов A и B .

В смеси газов, в единице объема которой содержится n_A молекул сорта A и n_B молекул сорта B и, следовательно, суммарная плотность числа частиц составляет $n_A + n_B$, величина, обратная длине свободного пробега иона, равна $1/l = n_A\sigma_A + n_B\sigma_B$. В этом нетрудно убедиться, если рассуждать точно так же, как при получении выражения для l в случае однокомпонентного газа. Поэтому подвижность

иона в заданной смеси газов может быть найдена из соотношения

$$\frac{1}{\mu} = m\bar{v} (\sigma_A n_A + \sigma_B n_B).$$

Отсюда находим, что $\mu^{-1} = \mu_A^{-1} + \mu_B^{-1}$ и, следовательно,

$$\mu = \frac{\mu_A \mu_B}{\mu_A + \mu_B}.$$

К главе 44. Законы термодинамики

44.1. Процесс AB протекает при $V = \text{const}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_{T_A}^{T_B} \frac{dQ}{T} = \frac{kN}{(\gamma-1)} \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = \\ &= \frac{kN}{(\gamma-1)} \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{kN}{(\gamma-1)} \ln \frac{P_B}{P_A} = \Delta S_{DC}. \end{aligned}$$

Процесс BC протекает при $P = \text{const}$. В этом случае

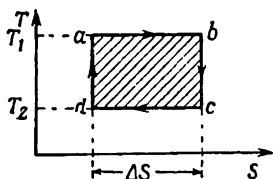
$$\Delta S_{BC} = \frac{kN\gamma}{(\gamma-1)} \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{kN\gamma}{(\gamma-1)} \ln \frac{V_C}{V_B} = \Delta S_{AD}.$$

а) Из полученных выражений видно, что изменение энтропии в процессах ABC и ADC , действительно, одно и то же и равно

$$\begin{aligned} \Delta S_{ABC} &= \Delta S_{ADC} = \frac{kN}{(\gamma-1)} \ln \frac{P_B}{P_A} + \frac{kN\gamma}{(\gamma-1)} \ln \frac{V_C}{V_B} = \\ &= \frac{kN}{(\gamma-1)} \left[\ln \frac{P_B}{P_A} + \gamma \ln \frac{V_C}{V_B} \right] = \frac{kN}{\gamma-1} \ln \left(\frac{P_C V_C^\gamma}{P_A V_A^\gamma} \right). \end{aligned}$$

б) Поскольку, согласно условию задачи, $kN = R$, то $\Delta S_{ABD} = \Delta S_{ADC} = 3,7 R = 30,8 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$.

44.2. Идеальный цикл Карно, показанный на диаграмме $P-V$ в «Лекциях» (см. фиг. 44.6, вып. 4, стр. 109), на диаграмме $T-S$ имеет вид, представленный на рисунке.



Величина ΔS равна изменению энтропии при изотермическом процессе:

$$\Delta S = \Delta S_{ab} = \int_a^b \frac{dQ_1}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_a^b P dV = Nk \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

Из уравнения адиабаты в переменных V, T (см. решение задачи 39.1) можно получить следующее соотношение:

$$V_b = V_c \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad V_d = V_a \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Таким образом,

$$\Delta S = Nk \ln \left[\frac{V_c}{V_a} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \right] = Nk \left(\ln \frac{V_c}{V_a} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} \right).$$

44.3. Для цикла Карно

$$К. п. д. = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{873 - 293}{873} = 66,3\%.$$

44.4. а) Из уравнения адиабаты в переменных V, T (см. решение задачи 39.1) следует, что

$$V_b = V_c \left(\frac{T_c}{T_a} \right)^{1/(\gamma-1)} = 8,8 \text{ л},$$

$$V_d = V_c \left(\frac{T_a}{T_c} \right)^{1/(\gamma-1)} = 12,3 \text{ л}.$$

б) В соответствии с решением задачи 44.2 для изотермического процесса мы имеем

$$Q_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = 1270 \text{ Дж}.$$

$$\text{в) } Q_{cd} = RT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} = -\frac{T_2}{T_1} Q_{ab} = -952 \text{ Дж}.$$

$$\text{г) } К. п. д. = (T_1 - T_2)/T_1 = 25\%.$$

$$\text{д) } \Delta S_{ab} = Q_{ab}/T_1 = 0,11 \text{ Дж/К} = -\Delta S_{cd}.$$

44.5. Поскольку процесс расширения является изотермическим (см. решение задачи 44.2), то

$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} = Nk \ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{M}{\mu} R \ln \frac{P_1}{P_2},$$

где P_1 — начальное давление, P_2 — давление атмосферы. Отсюда

$$\frac{\Delta S}{M} = \frac{R}{\mu} \ln \frac{P_1}{P_2} = 11 \text{ кДж/К} \cdot \text{кг}.$$

К главе 45. Примеры из термодинамики

45.1. Если через $R_\odot$ обозначить радиус Солнца, то полная интенсивность излучаемой Солнцем энергии равна $4\pi R_\odot^2 \sigma T^4$. На расстоянии 1 А.Е., равном расстоянию от Земли до Солнца, ($L = 1 \text{ А.Е.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$), на площадь πr^2 (r — радиус медной сферы) падает излучение с энергией

$$\pi r^2 \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T^4}{4\pi L^2} = \frac{\pi r^2 R_\odot^2 \sigma T^4}{L^2}.$$

Поскольку $R_\odot = L\alpha/2$, где α — угол, под которым виден диаметр Солнца с Земли, а интенсивность энергии, излучаемой медной

сферой с температурой T_1 , равна $4\pi r^2 \sigma T_1^4$, то из условия теплового баланса

$$\frac{\pi}{4} r^2 \alpha^2 \sigma T^4 = 4\pi r^2 \sigma T_1^4$$

находим

$$T_1 = \frac{T \sqrt{\alpha}}{2} = 270 \text{ К.}$$

45.2. Максимальную температуру данной области Земли определяем из условия: $1395 \text{ Вт/м}^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4 \cdot T^4$. Отсюда $T = 122^\circ \text{С}$.

45.3. Черное тело радиусом r излучает в единицу времени энергию, равную $4\pi r^2 \sigma T^4$. Эта энергия, конечно, поглощается оболочкой. Тонкая зачерненная с обеих сторон оболочка излучает энергию как с внутренней, так и с внешней своей поверхности. Полная энергия, излучаемая оболочкой в единицу времени, равна $8\pi R^2 \sigma T_1^4$.

В условиях теплового равновесия оболочка столько же получает энергии, сколько и излучает, т. е.

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = 8\pi R^2 \sigma T_1^4.$$

Отсюда

$$T_1^4 = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 T^4.$$

Скорость охлаждения определяется интенсивностью излучаемой телом энергии в единицу времени. В отсутствие оболочки черное тело в единицу времени излучает энергию $4\pi r^2 \sigma T^4$. При наличии оболочки скорость охлаждения всей системы, а следовательно, и тела, будет определяться излучаемой энергией в окружающее пространство с внешней стороны оболочки, т. е. $4\pi R^2 \sigma T_1^4$. Отношение интенсивностей излучения энергии с оболочкой и без нее равно $R^2 T_1^4 / r^2 T^4 = 1/2$. Следовательно, экран вдвое уменьшает скорость охлаждения тела.

45.4. Давление газа в центре Солнца можно определить из уравнения идеального газа $P_r = nkT$, где n — число частиц в единице объема. Концентрации протонов и электронов на Солнце в предположении об его электронейтральности нужно положить равными $n/2$. Поскольку плотность газа $\rho = (m_p + m_e)(n/2) \approx (1/2)m_p \cdot n$ (m_p и m_e — массы протона и электрона), то $P_r = 2\rho RT/\mu_p$. Полагая $\rho = 80 \text{ г/см}^3$ и $\mu_p = 1$, для заданной температуры в центре Солнца находим $P_r = 1,7 \cdot 10^{16} \text{ ньютон/м}^2$. Радиационное давление $P_{\text{рад}} = (4/3)\sigma T^4/c = 7,2 \cdot 10^{14} \text{ ньютон/м}^2$.

45.5. В соответствии с уравнением Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dT}{dP_{\text{пар}}} = \frac{TV_0}{L},$$

где V_0 — объем газа, а L — скрытая теплота испарения воды массой $V_0 \rho_0$. Давление пара с высотой падает по закону $dP_{\text{пар}}/dz = -\rho g$ (ρ — плотность воздуха). Следовательно, изменение темпе-

ратуры кипения с ростом высоты (полагаем на поверхности Земли $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$) происходит по закону

$$\frac{dT}{dz} \approx \frac{dT}{dP_{\text{пар}}} \frac{dP_{\text{пар}}}{dz} = - \frac{TV_{\text{ог}} \rho g}{L} = 3,1 \text{ К/км.}$$

- 45.6. Поскольку внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема, т. е. $U = C_V T$, то превышение C_P над C_V связано с той работой, которую совершает расширяющийся газ, когда его нагревают при постоянном давлении. Имеем

$$C_P \Delta T = \Delta Q = \Delta U + P \Delta V = C_V \Delta T + P \Delta \left(\frac{RT}{P} \right).$$

Отсюда сразу получаем $C_P - C_V = R$.

- 45.7. Из уравнения Клапейрона — Клаузиуса $L = \Delta V T (dP/dT)$, где $\Delta V = V_{\text{пар}} - V_{\text{вод.}} \approx V_{\text{пар}} = 206 \text{ м}^3/\text{кг}$. Из таблиц физических величин находим $dP/dT = 45 \text{ ньютон/м}^2 \cdot \text{К}$. Отсюда $L = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кДж/кг}$ (это значение совпадает с табличным).

- 45.8. Когда абсолютно черное тело, т. е. тело, поглощающее всю падающую на него энергию, находится в равновесии с излучением, то оно поглощает столько же энергии, сколько и излучает, т. е. σT^4 (на единицу поверхности). Следовательно, поток энергии излучения на черное тело равен σT^4 . Но такой же поток энергии будет падать и на единицу поверхности тела, находящегося в равновесии с излучением, но поглощающего только долю A падающего излучения. Поскольку такое тело поглощает столько энергии, сколько и испускает (в случае теплового равновесия), то излучаемая им энергия равна $A \sigma T^4$. Если же тело не находится в равновесии с излучением, то испускаемая им плотность потока энергии по-прежнему будет равна $A \sigma T^4$.

- 45.9. а) Если L — скрытая теплота плавления массы вещества, то

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_L - V_G)},$$

где V_L — объем, занимаемый массой жидкости, а V_G — объем, занимаемый той же массой твердого вещества (см. «Лекции», вып. 4, стр. 134). Поскольку $L > 0$, то при $V_G > V_L$ (если вещество при замерзании расширяется) $dP/dT < 0$, или $dT/dP < 0$, т. е. температура замерзания должна понижаться с увеличением давления.

- б) Если пренебречь зависимостью величин L , V_L и V_G от температуры и малой сжимаемостью жидкости и твердого тела (т. е., кроме того, считать V_L и V_G не зависящими от давления), то уравнение Клапейрона — Клаузиуса можно проинтегрировать. Записав это уравнение в виде

$$\frac{dT}{T} = \frac{V_L - V_G}{L} dP,$$

найдем после интегрирования

$$T = T_0 e^{P(V_L - V_G)/L},$$

где T_0 — постоянная интегрирования. Определим T_0 из условия, что при нормальном давлении $P_0 = 1 \text{ атм}$ температура таяния льда равна 0°C , т. е. 273 К :

$$T = (273 \text{ К}) \exp [(P - P_0)(V_L - V_G)/L].$$

Оценим далее давление P , которое оказывает лезвие конька на лед. Длина конька примерно равна 40 см, а ширина лезвия 2 мм. При этом площадь лезвия конька оказывается равной 8 см². Принимая средний вес человека равным 80 кг и считая, что этот вес распределен по площади одного конька, находим $\Delta P = P - P_0 = 9 \cdot 10^4$ кг/м² = 8,8 · 10⁵ н/м². Из таблиц физических величин находим $\Delta V = V_G - V_L = 8 \cdot 10^{-8}$ м³/г и $L = 335$ Дж/г. Таким образом,

$$T \approx (273 \text{ К}) \left[1 - \frac{(P - P_0)(V_G - V_L)}{L} \right].$$

Отсюда самая низкая температура льда, при которой он мог бы расплавиться под лезвием конька, равна

$$t^\circ \text{С} = (-273 \text{ К}) \frac{\Delta P \Delta V}{L} = -0,06^\circ \text{С}.$$

Из этого расчета видно, что катание по льду на коньках вовсе не связано с плавлением льда под коньком.

К главе 47. Звук. Волновое уравнение

47.1. Поскольку $\mu_{\text{H}_2} = 2$, $\mu_{\text{He}} = 4$, $\gamma_{\text{H}_2} = 7/5$, $\gamma_{\text{He}} = 5/3$, то

$$\frac{c_{\text{He}}}{c_{\text{H}_2}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{He}} \mu_{\text{H}_2}}{\gamma_{\text{H}_2} \mu_{\text{He}}}} = 0,78.$$

47.2. Частота звука, издаваемого свистком, пропорциональна скорости звука (см. гл. 49 «Лекций», вып. 4), а последняя $\sim \sqrt{T}$. Следовательно, искомая температура по шкале Кельвина в 4 раза выше температуры жидкого воздуха, т. е. равна 372 К = 99°С.

47.3. Резонансная частота пропорциональна скорости звука (см. гл. 49 «Лекций», вып. 4). Поэтому при заполнении резонансных полостей гелием частоты звука увеличатся в

$$\sqrt{\frac{\gamma_{\text{He}} \mu_{\text{возд}}}{\gamma_{\text{возд}} \mu_{\text{He}}}} = 2,9 \text{ раза}$$

($\gamma_{\text{He}} = 5/3$, $\gamma_{\text{возд}} = 7/5$, $\mu_{\text{возд}} = 29$, $\mu_{\text{He}} = 4$). Тональность пения будет на две октавы выше.

47.4. Изменение давления ΔP в звуковой волне связано с изменением плотности $\Delta \rho$ соотношением $\Delta P = c_s^2 \Delta \rho$, где c_s — скорость звука.

а) $\Delta \rho_m = \Delta P_m / c_s^2 \approx 10^{-8}$ г/см³.

б) В плоской волне $\Delta \rho = \Delta \rho_m \exp[ik(x - c_s t)]$ и $\Delta \rho = -\rho_0 (\partial \chi / \partial x)$.

Таким образом, учитывая, что $\rho_0 = \gamma P / c_s^2$, находим

$$\chi_m = \frac{\Delta \rho_m}{\rho_0} \frac{c_s}{\omega} = \frac{\Delta P_m}{\gamma P} \frac{c_s}{\omega} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 2500 \text{ Å}.$$

47.5. Частоты колебания резины пропорциональны корню квадратному из отношения натяжения T к линейной плотности σ (см., например, решение задачи 47.6) и обратно пропорциональны ее длине, т. е. $\omega \sim$

$\sim (1/L) \sqrt{T/\sigma}$. Поскольку $T \sim L$, $\sigma \sim 1/L$, то ясно, что частоты колебаний такой резины не зависят от ее длины. Поэтому высота звука такой «струны» в любой момент времени одна и та же. Иначе обстоит дело для скрипичной струны, поскольку для струны $\sigma = \text{const}$ и $L = \text{const}$. Поэтому с увеличением натяжения струны (настройка) звук получается более высокой частоты.

47.6. Рассмотрим участок струны длиной

$$\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx dx$$

и напишем для него уравнение движения вдоль оси y . Очевидно, масса такого участка равна σdx (σ — линейная плотность массы), а ускорение d^2y/dt^2 . Равнодействующую сил, действующих на выделенный участок, найдем, проецируя силы натяжения в точках x и $x + dx$ на ось y . На концах отрезка эти проекции равны величине T , умноженной на синусы углов, которые составляют касательные к струне в этих точках с осью x . В силу малости углов синусы приближенно равны тангенсам этих углов, т.е. dy/dx . Следовательно, равнодействующая сил для участка струны, направленная в поперечном к струне направлении, равна

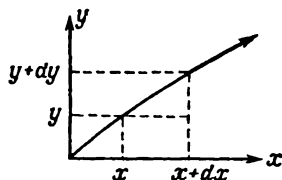
$$T \frac{dy}{dx} \Big|_{x+dx} - T \frac{dy}{dx} \Big|_x = T dx \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Уравнение движения выделенного участка струны запишется в виде

$$\sigma dx \frac{d^2y}{dt^2} = T dx \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Сокращая на dx обе части получившегося уравнения и вводя обозначение $v^2 = T/\sigma$, находим искомое волновое уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2y}{dt^2}.$$



47.7. Выполнив простое дифференцирование, получим уравнение

$$\left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2\right) A e^{i(\omega t - kx)} = 0,$$

которое при $A \neq 0$ выполняется лишь при условии, что $\omega = vk$.

К главе 48. Биения

48.1. По определению $v_{\text{фаз}} = \omega/k$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор. Согласно условию задачи, $v_{\text{фаз}} = \sqrt{g/k}$. Следовательно, $\omega = \sqrt{gk}$
Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_{\text{фаз}}.$$

Если $\lambda = 10^3$ м, то $v_{\text{фаз}} = 39,5$ м/сек.

48.2. Для заданной волны $\omega = kv_{\text{фаз}} = \sqrt{gk + Tk^3/\rho}$. Отсюда

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\lambda (g + 12\pi^2 T/\rho \lambda^2)}{4\pi \sqrt{(\lambda g/2\pi) + (2\pi T/\lambda \rho)}}.$$

48.3. а) $v_{\text{фаз}} = \left(\frac{2\pi T}{\lambda \rho} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} = 24,4 \text{ см/сек.}$

б) $v_{\text{фаз}} = 17,8 \text{ см/сек.}$

48.4. Для искомой волны $dv_{\text{фаз}}/d\lambda = 0$. Из этого уравнения следует

$$-\frac{2\pi T}{\rho \lambda^2} + \frac{g}{2\pi} = 0;$$

отсюда

$$\lambda_{\text{мин}} = 2\pi \sqrt{\frac{T}{\rho g}} = 1,5 \text{ см}$$

и

$$\omega_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{4\pi g}{\lambda_{\text{мин}}}} = 90,6 \text{ сек}^{-1}.$$

48.5. Благодаря эффекту Доплера (см. § 6 гл. 34 «Лекций», вып. 3) частота звука, регистрируемая от какого-либо источника, зависит как от скорости источника звука, так и от скорости наблюдателя. Если наблюдатель покоится, а источник звука движется со скоростью v на него или от него (последнему случаю отвечает знак минус в приведенной ниже формуле), то частота регистрируемого звука равна

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 \mp v/c_s} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{v}{c_s} \right) = \omega_0 \pm \omega_0 \frac{v}{c_s} = \omega_0 \pm \Delta\omega,$$

где ω_0 — частота звука, испускаемого покоящимся источником. Так как $\omega_0 = 340 \text{ гц}$, $c_s = 340 \text{ м/сек}$, $v = 5 \text{ м/сек}$, то $\Delta\omega = 5 \text{ гц}$.

Машинист движется вместе с источником звука. Поэтому он слышит звук частотой $\omega_0 = 340 \text{ гц}$. Однако частота эха, которое он услышит, равна 350 гц . Действительно, скалы достигает звук, испущенный движущимся к скале источником. Частота его равна $\omega_0 + \Delta\omega$. Как известно, при отражении частота не меняется. Если учесть, что машинист движется к скале со скоростью v , то частота вернувшегося к нему эха равна $\omega_0 + 2\Delta\omega$.

Человек, стоящий на земле около последнего вагона, услышит гудок частотой $\omega_0 - \Delta\omega = 335 \text{ гц}$, так как источник звука удаляется от него со скоростью v . Эхо, имеющее частоту звука, испущенного движущимся к скале гудком, придет к человеку с частотой, равной $\omega_0 + \Delta\omega = 345 \text{ гц}$. Так как частоты гудка и эха различаются, то при их интерференции возникнут биения звука с частотой биений 10 гц . Такие биения отметит и машинист, и человек, стоящий на земле возле последнего вагона.

К главе 49. Собственные колебания

49.1. Обозначим через x и y смещения грузов m_1 и m_2 в горизонтальном направлении. Очевидно, сила, действующая на тело массой m_1 со стороны левой пружины, равна $-k_1x$, а со стороны правой $k(y-x)$. На тело массой m_2 слева действует сила $-k(y-x)$, а справа —

сила, равная $-k_2y$. Следовательно, уравнения движения тел можно написать в виде

$$m_1\ddot{x} = -k_1x + k(y - x),$$

$$m_2\ddot{y} = -k(y - x) - k_2y.$$

С учетом того, что $k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2$, эту систему дифференциальных уравнений можно привести к виду

$$\ddot{x} + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m_1}\right)x - \frac{k}{m_1}y = 0,$$

$$\ddot{y} + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m_2}\right)y - \frac{k}{m_2}x = 0.$$

49.2. Будем искать решение полученной в предыдущей задаче системы уравнений в виде $x = Ae^{i\omega t}$ и $y = Be^{i\omega t}$. Выполняя необходимые дифференцирования и сокращая уравнения на $e^{i\omega t}$, имеем

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m_1}\right)A + \frac{k}{m_1}B = 0,$$

$$\frac{k}{m_2}A + \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m_2}\right)B = 0.$$

Введя обозначение $\lambda = \omega^2 - \omega_0^2$, запишем эту систему однородных уравнений в виде

$$\left(\lambda - \frac{k}{m_1}\right)A + \frac{k}{m_1}B = 0,$$

$$\frac{k}{m_2}A + \left(\lambda - \frac{k}{m_2}\right)B = 0.$$

Отличное от нуля решение этой системы уравнений существует только в том случае, когда детерминант, составленный из коэффициентов этой системы уравнений, обращается в нуль, т. е. если

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & \lambda - \frac{k}{m_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим квадратное уравнение, имеющее два вещественных решения: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = k(m_1^{-1} + m_2^{-1})$. Следовательно,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2,$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + k(m_1^{-1} + m_2^{-1}).$$

Подставляя ω_1^2 в систему уравнений, находим, что $A = B$. Для частоты ω_2 получим другое соотношение между A и B :

$$B = -\frac{m_1}{m_2}A.$$

Таким образом, произвольное решение уравнений движения тел имеет вид

$$\begin{aligned}x &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}, \\y &= A_1 e^{i\omega_1 t} - \frac{m_1}{m_2} A_2 e^{i\omega_2 t}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что линейные комбинации координат x и y

$$\xi = x - y, \quad \eta = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}$$

являются нормальными координатами системы, так как они удовлетворяют уравнениям гармонических колебаний

$$\ddot{\xi} + \omega_2^2 \xi = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{\eta} + \omega_1^2 \eta = 0.$$

- 49.3. а) Трехмерное волновое уравнение, описывающее распространение волн со скоростью распространения v , имеет вид

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Подставляя в это уравнение заданную функцию $f(x, y, z, t)$ и выполняя простые дифференцирования ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$), получаем уравнение

$$\left[\pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) - \frac{\omega^2}{v^2} \right] f = 0$$

которое при $A \neq 0$ удовлетворяется, если

$$\omega^2 = v^2 \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right).$$

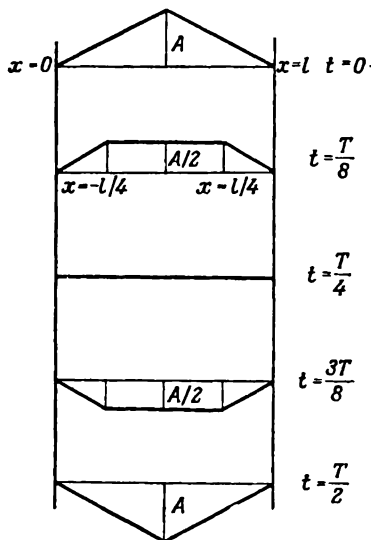
- б) Решение тривиально, так как при заданных x , y и z один из синусов обращается в нуль.
в) Временная зависимость заданной функции определяется множителем $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ (см. краткое введение к условиям задач к гл. 22, «Алгебра»). Следовательно, вещественная часть функции осциллирует во времени как косинус, а мнимая — как синус.

- 49.4. Согласно условию задачи,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{l^2 + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{9}},$$

где $\omega_0 = v\pi/a$. Наименьшая частота колебаний, очевидно, равна $\omega_0/3$. Десять искоемых частот, измеренных в единицах $\omega_0/3$, равны 1; 1,665; 2,05; 2,22; 2,78; 3,33; 3,50; 3,76; 3,93; 4,04; 4,33.

- 49.5. Пусть $f(x)$ — функция, описывающая начальную форму оттянутой струны, а T — полный период колебаний. Представим себе начальную форму струны как суперпозицию двух горбов, описываемых функциями $f(x)/2$ и движущихся с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях. Тогда отражение каждого горба от соответствующего закрепленного конца струны можно описать так, как это изложено в § 1 гл. 49 «Лекций» (вып. 4). На рисунке показаны найденные таким построением положения струны в моменты времени $t = 0, T/8, T/4, 3T/8$ и $T/2$.



К главе 50. Гармоники

- 50.1. а) Поскольку, с одной стороны, $f(\pi/2) = 1$, а с другой,

$$f(\pi/2) = (4/\pi) \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

то отсюда следует искомый ответ.

- б) Воспользуемся «теоремой об энергии» [см. «Лекции», формула (50.23), вып. 4, стр. 213]. В рассматриваемом случае $T = 2\pi$. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi = \pi \frac{16}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right).$$

Разделив правую часть на численный множитель, стоящий перед суммой ряда, получим требуемый результат.

- в) Эту часть задачи можно решить по крайней мере двумя способами:

1. Сдвинем прямоугольную волну на $-\pi/2$. Вычисляя коэффициенты фурье-разложения аналогично тому, как это было сделано в «Лекциях» (вып. 4, стр. 212), и используя «теорему об энергии», находим, что сумма квадратов обратных четных чисел равна $\pi^2/24$. Сумма квадратов обратных нечетных чисел найдена в п. (б) задачи и равна $\pi^2/8$. Складывая два ряда, находим, что сумма заданного ряда равна $\pi^2/6$.

2. Второй способ решения. Обозначим сумму данного ряда через A и перепишем его следующим образом:

$$A = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \\ = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{A}{4}.$$

Поскольку $(1 + 1/9 + 1/25 + \dots) = \pi^2/8$, то из предыдущего выражения имеем

$$A = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

50.2. Заданная функция имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{2\pi - x}{\pi}, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Используя формулу фурье-разложения

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

для заданной функции получаем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin nx dx = 0.$$

Следовательно,

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right).$$

50.3. а) Воспользуемся «теоремой об энергии» (см. «Лекции», вып. 4, стр. 213):

$$\int_0^T f^2(t) dt = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $T = 2\pi$, $b_n = 0$ и

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi/3, \text{ находим}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{4} + \pi \frac{16}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right).$$

Нетрудно видеть, что отсюда следует искомый ответ.
б) Рассмотрим ряд

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Представим этот ряд в виде

$$\begin{aligned} I &= \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{I}{2^4}. \end{aligned}$$

Решая это простое уравнение, находим

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2^4}{2^4 - 1} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) = \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{2^4}{(2^4 - 1)} = \frac{\pi^4}{90}.$$

50.4. Задача легко решается, если вспомнить, что при $q < 1$

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots$$

Поэтому

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx.$$

Если проинтегрировать почленно и в n -м члене (n — любое) сделать замену переменной интегрирования $u = nx$, то мы придем к результату

$$I = \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du.$$

Так как (см. решение задачи 50.3) сумма ряда, стоящего перед интегралом, равна $\pi^4/90$, а сам интеграл равен 6, то отсюда следует искомый результат.

50.5. Заданная функция $h(x)$ на интервале $0 \leq x \leq 2\pi$ имеет вид $h(x) = x/2\pi$. Определяя коэффициенты фурье-разложения, находим

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

50.6. а) Так как $V(t) = V_0 \sin \omega t$, то $T = 2\pi/\omega$ и

$$\bar{V} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_0 \sin \omega t \, dt = \frac{2V_0}{\pi}.$$

б) Разложим функцию в ряд Фурье. Он имеет вид

$$V(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) \, dt = \frac{2V_0}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T V(t) \cos n\omega t \, dt.$$

Амплитуда второй гармоники

$$a_2 = \frac{2V_0}{T} \int_0^T |\sin \omega t| \cos 2\omega t \, dt = \frac{8V_0}{3\pi}.$$

50.7. а) $V_{\text{вх}}(t) = V_0 \sin \omega t$. Представляя $\sin^3 \omega t$ в виде

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4} (-\sin 3\omega t + 3 \sin \omega t),$$

находим

$$V_{\text{вых}}(t) = \left(V_0 + \frac{3eV_0^2}{4} \right) \sin \omega t - \frac{eV_0^3}{4} \sin 3\omega t.$$

Следовательно, искажение волны определяется изменением амплитуды основной гармоник и появлением третьей гармоники. Эффект выпрямления отсутствует.

б) Пусть $V_{\text{вх}}(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$, причем $\omega_1 \neq \omega_2$. Возведем это выражение в куб:

$$V_{\text{вх}}^3(t) = A^3 \sin^3 \omega_1 t + 3A^2 B \sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t + \\ + 3AB^2 \sin \omega_1 t \sin^2 \omega_2 t + B^3 \sin^3 \omega_2 t.$$

Члены, содержащие синусы в кубе, можно разложить по гармоникам, используя решение в п. (а) этой задачи. Остальные члены разложим по синусам и косинусам. Например,

$$\sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t = \frac{1}{2} [\sin \omega_2 t - \cos 2\omega_1 t \sin \omega_2 t] = \\ = \frac{1}{2} \sin \omega_2 t - \frac{1}{4} \sin (2\omega_1 + \omega_2) t - \frac{1}{4} \sin (\omega_2 - 2\omega_1) t.$$

Используя это разложение, окончательно находим

$$\begin{aligned}
 V_{\text{вых}}(t) = & \left(A + \frac{3eA^3}{4} + \frac{3eAB^2}{2} \right) \sin \omega_1 t + \\
 & + \left(B + \frac{3eB^3}{4} + \frac{3eA^2B}{4} \right) \sin \omega_2 t - \frac{eA^3}{4} \sin 3\omega_1 t - \\
 & - \frac{3eA^2B}{4} \sin (2\omega_1 + \omega_2) t + \frac{3eA^2B}{4} \sin (2\omega_1 - \omega_2) t - \\
 & - \frac{3eAB^2}{4} \sin (\omega_1 + 2\omega_2) t - \frac{3eAB^2}{4} \sin (\omega_1 - 2\omega_2) t - \frac{eB^3}{4} \sin 3\omega_2 t.
 \end{aligned}$$

Таким образом, помимо изменения амплитуд колебания основных гармоник, кубическая нелинейность приводит к появлению новых колебаний с частотами $3\omega_1$, $2\omega_1 \pm \omega_2$, $\omega_1 \pm 2\omega_2$, $3\omega_2$. Эффект выпрямления отсутствует.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	3
Предисловие	5

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Том I

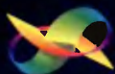
Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики	9
Вып. 2. Пространство. Время. Движение	41
Вып. 3. Излучение. Волны. Кванты	65
Вып. 4. Кинетика. Теплота. Звук	80

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Том I

Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики	97
Вып. 2. Пространство. Время. Движение	177
Вып. 3. Излучение. Волны. Кванты	233
Вып. 4. Кинетика. Теплота. Звук	253

Ф Л Ф



Вниманию читателя предлагается знаменитый курс лекций по общей физике, который выдающийся американский физик, Нобелевский лауреат Ричард Фейнман читал в Калифорнийском технологическом институте.

Лекции Фейнмана не похожи ни на один известный курс. Они отличаются оригинальным методом изложения, в котором отразилась яркая научная индивидуальность автора, его точка зрения на пути обучения студентов физике, его умение заразить читателей интересом к науке. Последовательность изложения и выбор материала также отличаются от традиционных. В лекциях не тратится время на объяснение «ученым языком» того, что современный читатель уже знает или слышал. Зато в них увлекательно рассказывается о том, как человек изучает окружающую его природу, какое положение занимает физика в ряду других наук, какие проблемы наука решает сегодня и будет решать завтра.

В рассказе Фейнмана ярко отражаются те причины, которые побуждают физика вести тяжелую работу исследователя, а также те сомнения, которые у него возникают, когда он сталкивается с трудностями, кажущимися непреодолимыми. Эти лекции помогают не только понять, почему интересно заниматься наукой, но и почувствовать, какой дорогой ценой достаются победы и как порой бывают тяжелы пути, к ним ведущие.



1.4 ЗАДАЧИ и УПРАЖНЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46



2422 ID 20589



9 785354 006977 >

Любые замечания и предложения по изданию, а также замеченные опечатки присылайте по адресу **URSS@URSS.ru**. Полный список замеченных опечаток можно будет увидеть на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине:

<http://URSS.ru>